C ollection
I nter
A fricaine de
M athématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

3e

Moumouni DORO
Gorgui FAYE
Antoine HOUEGBE-HOUDJOHON
Aka KAKOU
Hubert MEYER
Daniel PAULUS
Abel TAPCHOM
Soma TRAORÉ

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	GOMORES	GUINÉE	RWANDA
BURKINA FASO	GONGO	MADAGASCAR	SÉNÉGAL
BURUNDI	GOTE D'IVOIRE	MALI	TCHAD
GAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TOGO
GENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	ZAÏRE

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Mme Georgette OUÉDRAOGO-HADDAD

M. Frédy BÉGHAIN	M. Hubert MEYER
M. Jacques BOUBILA	M. Denny OUÉHI
M. Gervais LAFON	M. Alain RENAULT

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995 et à Antananarivo en 1996.

ISSN 1248–587–X
ISBN 2–84–129046–8

PRÉFACE

Dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés.

Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir.

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques que nous proposons aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'Enseignement Secondaire.

Elle a pour objectifs majeurs :

– l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socio-culturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;

– l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;

– la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

Les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives.

Conformément à notre conception de l'enseignement des mathématiques, nous n'avons pas voulu présenter les leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate permettent l'assimilation des notions étudiées. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement permettent aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

Nous exprimons notre gratitude aux différents Ministres chargés de l'Éducation dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, ainsi qu'aux responsables de la Coopération Française et de la Coopération Belge qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, nous ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

Saliou Touré

SOMMAIRE

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

PLATON (428-347 av. J.-C., Athènes)

1

Propriété de Thalès

G. Philippart de Foy / Explorer

La case des cérémonies de l'une des grandes chefferies de l'Ouest du Cameroun a les caractéristiques suivantes :
- *les piliers sont situés sur un cercle de 18 m de diamètre et ont 4 m de hauteur ;*
- *si on prolongeait le toit jusqu'au sol, on obtiendrait un cône dont la base est un disque de 24 m de diamètre.*

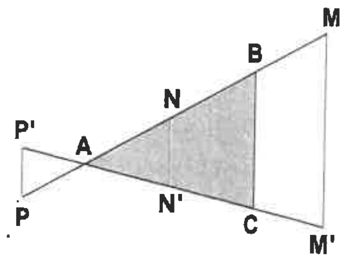
Comment calculer la hauteur de cette majestueuse case ?

SOMMAIRE

1 Propriété de Thalès dans le triangle

1.1 PROPRIÉTÉ DE THALÈS

Activité



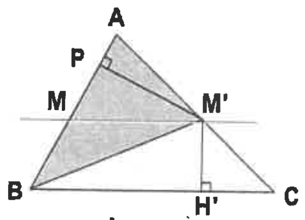
ABC est un triangle. M, N, P sont des points de (AB). M', N', P' sont les points de (AC), tels que les droites (MM'), (NN') et (P'P) soient parallèles à (BC).

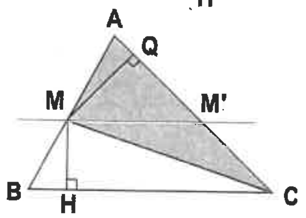
- À l'aide de ta règle graduée, détermine les distances : AB, AM, AN, AP, AC, AM', AN' et AP'.
- Calcule les quotients suivants et compare les : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AM'}{AC}$; $\frac{AP}{AB}$ et $\frac{AP'}{AC}$; $\frac{AN}{AB}$ et $\frac{AN'}{AC}$.

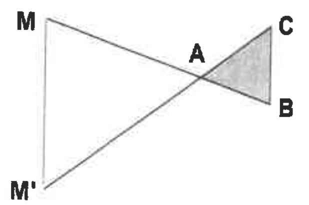
Il semble que pour toute position de M sur (AB) et de M' sur (AC) telle que (MM') soit parallèle à (BC), on ait : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

Démonstration

ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' le point de (AC) tel que : (MM') // (BC).
Démontrons que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.







- M ∈ [AB] et M' ∈ [AC]

On utilisera différentes expressions de l'aire d'un triangle.
Dans ce cas de figure, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM \times \frac{M'P}{2}}{AB \times \frac{M'P}{2}} = \frac{\text{aire (AMM')}}{\text{aire (ABM')}}$$

$$\frac{AM'}{AC} = \frac{AM' \times \frac{MQ}{2}}{AC \times \frac{MQ}{2}} = \frac{\text{aire (AMM')}}{\text{aire (ACM)}}$$

Il suffit de démontrer que : aire (ABM') = aire (ACM).

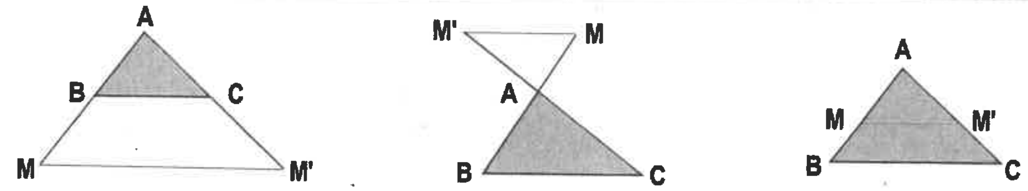
Les triangles BMC et BM'C ont la même aire $\mathcal{A}$, car ils ont le côté [BC] commun et des hauteurs égales : M'H' = MH.
L'aire de chacun des triangles ABM' et ACM est celle du triangle ABC diminuée de $\mathcal{A}$. Donc : aire (ABM') = aire (ACM).

- M ∉ [AB] et M' ∉ [AC]

On utilisera la symétrie de centre A et le résultat précédent.

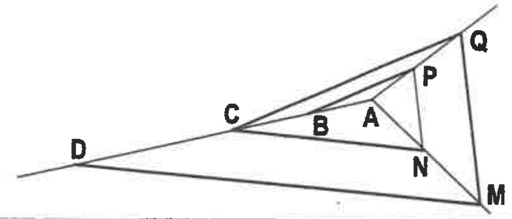
PROPRIÉTÉ DE THALÈS

ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC).
Si (MM') //(BC). alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.



EXERCICE

1.a Les droites (BP) et (CQ) sont parallèles.
Les droites (PN) et (QM) sont parallèles.
Les droites (NC) et (MD) sont parallèles.
Démontre que : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$.

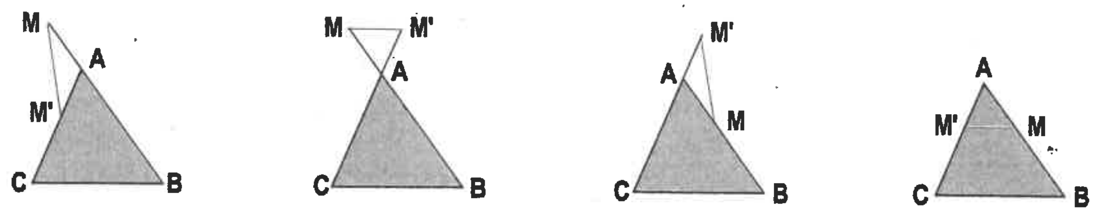


1.2 RÉCIPROQUE DE LA PROPRIÉTÉ DE THALÈS

Activité

Dans chacun des cas de figure ci-dessous, ABC est un triangle, M est un point de (AB) et M' un point de (AC) tels que : AB = 40 ; AC = 35 ; AM = 16 et AM' = 14

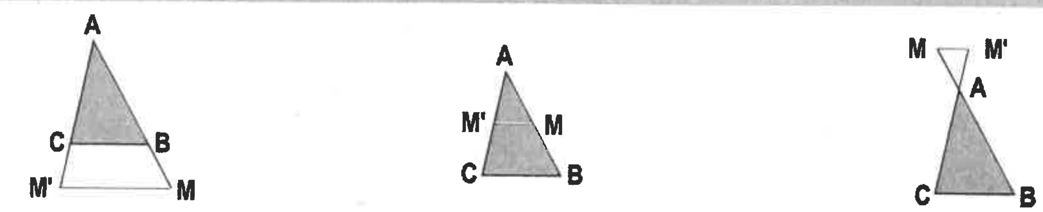
- Vérifie l'égalité des quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AM'}{AC}$. Précise dans quels cas on a : (MM') // (BC).



On admet la propriété :

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

ABC est un triangle. M est un point de (AB), M' un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de M' par rapport à A et C.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$ alors (MM') //(BC).



Cette propriété est appelée « Réciproque de la propriété de Thalès ».
En effet, dans la propriété directe, les droites (M'M) et (BC) sont parallèles. Une conséquence non précisée de cette donnée est que la position de M par rapport à A et B est la même que celle de M' par rapport à A et C.

On peut réunir la propriété de Thalès et sa réciproque.

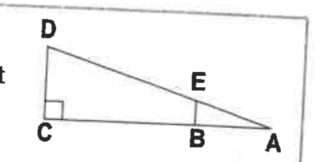
PROPRIÉTÉ

ABC est un triangle. M est un point de (AB), M' un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de M' par rapport à A et C.

(MM') // (BC) ***équivaut à*** $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

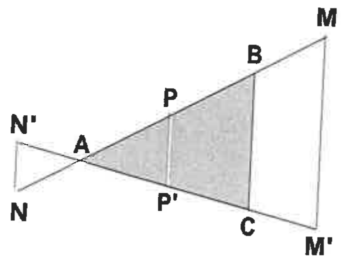
EXERCICE

1.b ACD est un triangle rectangle en C, B un point de (AC), E le point de (AD), tels que : BC = 90 ; AB = 30 ; DE = 108 ; AE = 36.
Démontre que (BE) et (CD) sont parallèles.



1.3 CONSÉQUENCE DE LA PROPRIÉTÉ DE THALÈS

Activité 1

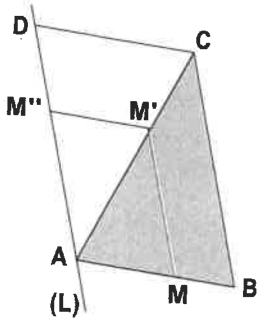


ABC est un triangle. M, N, P sont des points de (AB). M', N', P' sont les points de (AC) tels que les droites (MM'), (PP') et (NN') soient parallèles à (BC).

- À l'aide de ta règle graduée, détermine les distances : AM, AB, MM', BC, AN, NN', AP, PP'.
- Calcule les quotients suivants et compare les : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{MM'}{BC}$; $\frac{AN}{AB}$ et $\frac{NN'}{BC}$; $\frac{AP}{AB}$ et $\frac{PP'}{BC}$.

Il semble que pour toute position de M sur (AB) et de M' sur (AC) telle que (MM') soit parallèle à (BC), on ait : $\frac{MM'}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

Activité 2



ABC est un triangle. M est un point de (AB), M' le point (AC) tel que (MM') et (BC) soient parallèles.

On veut démontrer que : $\frac{MM'}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

Pour cela on trace la droite (L) passant par A et parallèle à (BC).
D et M'' sont des points de (L) tels que les droites (DC) et (M'M'') soient parallèles à (AB).

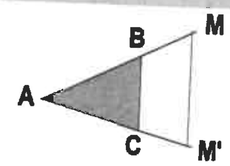
- Démontre que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{AM''}{AD}$. (1)

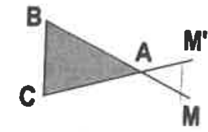
$AM'' = MM'$ (2) ; $AD = BC$ (3)

- Utilise les égalités (1), (2) et (3) pour justifier que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{MM'}{BC}$.

PROPRIÉTÉ

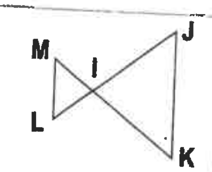
ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC).
Si (MM') //(BC). **alors** $\frac{MM'}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.



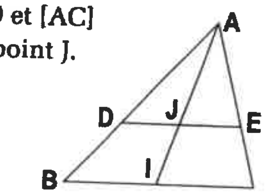


EXERCICES

1.c Les droites (MK) et (JL) sont sécantes en I. Les droites (ML) et (JK) sont parallèles.
JK = 30 ; IK = 24 ; IM = 12 ; IL = 9.
Détermine LM et IJ.



1.d ABC est un triangle. Une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en D et [AC] en E. [AI] est une médiane du triangle ABC. Elle coupe (DE) au point J.
Démontre que J est le milieu de [DE].



1.e ABC est un triangle. Une parallèle à (BC) coupe [AB] en F et [AC] en E de sorte que : $\frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$.
Démontre que : $\frac{\text{aire (AFE)}}{\text{aire (ABC)}} = \frac{4}{9}$.

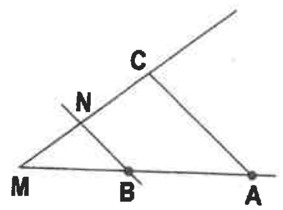
2 Utilisations des propriétés de Thalès

2.1 CONSTRUIRE UNE QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

Présentation

On donne trois segments de mesures a, b et c.
On veut construire la **quatrième proportionnelle** des nombres a, b et c, pris dans cet ordre.

Cela revient à construire un segment [MN] tel que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{MN}$.



Pour cela,
- on trace deux demi-droites de même origine M.
- sur l'une des demi-droites, on marque A et B tels que : MA = a et MB = b
- sur l'autre demi-droite, on marque C tel que : MC = c ;
- on trace la droite parallèle à (AC) qui passe par B ; elle coupe (MC) au point N.

D'après la propriété de Thalès dans le triangle MAC : $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MN'}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{MN}$.

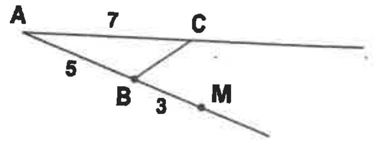
Donc MN est la quatrième proportionnelle des nombres a, b et c.

EXERCICE

2.a ABC est un triangle. M est un point de (AB).

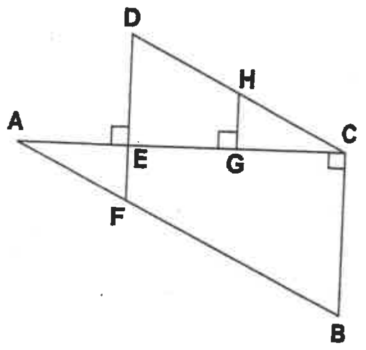
Construis le point N de (AC) tel que : $\frac{7}{5} = \frac{AN}{8}$.

Calcule CN.



2.2 CALCULER DES DISTANCES

Exemple 1



Sur la figure ci-contre : AE = EG = GC = ED = 2 ; BC = 3
Calculons EF et GH.

Dans le triangle ABC, d'après la conséquence de la propriété de Thalès,

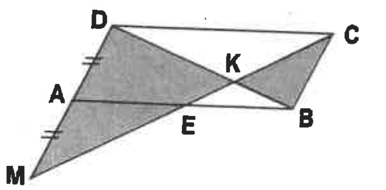
nous avons : $\frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CB}$;

$\frac{2}{6} = \frac{EF}{3}$.

Donc : EF = 1

Nous calculons de même GH dans le triangle CDE.

Exemple 2



ABCD est un parallélogramme.
M est le symétrique de D par rapport à A.
(CM) coupe (BD) au point K et (AB) au point E.
Démontrons que : $\frac{KD}{KB} = \frac{KC}{KE} = 2$.

• KDM est un triangle. B est un point de (KD), C un point de (KM) tels que les droites (BC) et (DM) soient parallèles. La conséquence de la propriété de Thalès permet d'écrire :

$\frac{KD}{KB} = \frac{DM}{BC}$.

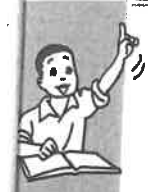
Nous savons que : BC = DA et DM = 2 × DA

donc : $\frac{KD}{KB} = \frac{2 \times DA}{DA} = 2$

• KCD est un triangle. B est un point de (KD), E un point de (KC) tels que les droites (CD) et (EB) soient parallèles. La propriété de Thalès permet d'écrire :

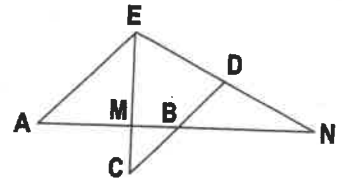
$\frac{KD}{KB} = \frac{KC}{KE} = 2$

EXERCICES



2.b AEN est un triangle. Une droite parallèle à (AE) coupe [EN] en D et [AN] en B. C est le symétrique de D par la symétrie centrale de centre B.

Démontre que : $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

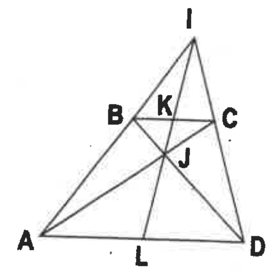


2.c ABCD est un trapèze de bases [AD] et [BC]. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes au point I, les droites (AC) et (BD) sont sécantes au point J.

Démontre que : $\frac{IB}{IA} = \frac{IC}{ID} = \frac{JC}{JA} = \frac{JB}{JD}$

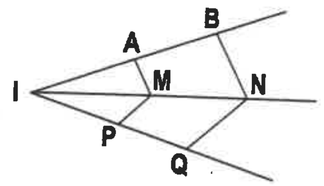
(IJ) coupe (BC) au point K et (AD) au point L.

Démontre que : $\frac{IB}{IA} = \frac{JK}{JL} = \frac{BC}{AD}$.



2.3 DÉMONTRER UN PARALLÉLISME DE DROITES

Exemple



(IB), (IN) et (IQ) sont trois droites concourantes en I.
A est un point de [IB].
M est un point de [IN] tel que (AM) // (BN).
P est un point de [IQ] tel que (MP) // (NQ).
Démontrons que (PA) et (QB) sont parallèles.

– Dans le triangle IBN, les droites (AM) et (BN) sont parallèles.

La propriété de Thalès permet d'écrire : $\frac{IA}{IB} = \frac{IM}{IN}$. (1)

– Dans le triangle IQN, les droites (PM) et (QN) sont parallèles.

La propriété de Thalès permet d'écrire : $\frac{IP}{IQ} = \frac{IM}{IN}$. (2)

Des égalités (1) et (2), nous tirons : $\frac{IA}{IB} = \frac{IP}{IQ}$.

Nous savons que A appartient à [IB] et P appartient à [IQ]. Donc, d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (AP) et (BQ) sont parallèles.

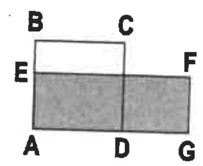
EXERCICES

2.d Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne les points A(3;0), B(0;3), C(-2;0) et D(0; $-\frac{9}{2}$).
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2.e ABCD est un carré. E est un point de [AB], G un point de [AD] et F le point tels que EFGA soit un rectangle de même aire que le carré ABCD.

Démontre que : $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$.

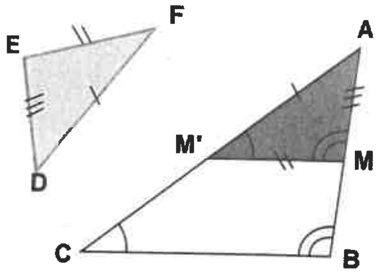
Démontre que les droites (BG) et (DE) sont parallèles.



3 Triangles semblables

3.1 PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES SEMBLABLES

Activité



ABC est un triangle. M est un point de [AB] et M' le point de [AC] tel que (MM') soit parallèle à (BC).

On dit que ABC et AMM' sont des **triangles semblabes.**

On sait que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{MM'}{BC}$

mes $\widehat{M'}$ = mes $\widehat{C}$ et mes $\widehat{M}$ = mes $\widehat{B}$

Les triangles DEF et AMM' sont superposables.
On dit que ABC et DEF sont des **triangles semblables.**

- Parmi les angles des triangles ABC et DEF, cite ceux qui ont la même mesure.
- À l'aide des distances AB, BC, AC, DE, EF et DF, écris trois quotients égaux.

On dit que : A et D sont des **sommets homologues,**
$\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ sont des **angles homologues,**
[AB] et [DE] sont des **côtés homologues.**

Pour retrouver aisément tous les éléments homologues de ces deux triangles semblables, on peut utiliser la disposition pratique ci-contre :

$$\frac{\text{A B C}}{\text{D E F}}$$

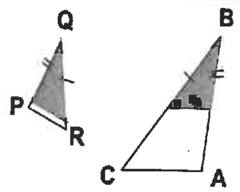
PROPRIÉTÉS

- **Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés sont deux à deux proportionnels.**

ABC et PQR sont semblables

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$$

- **Si deux triangles sont semblables, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.**

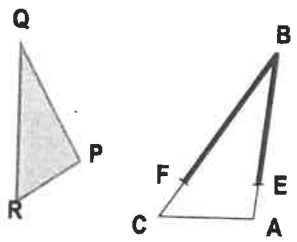


ABC et PQR sont semblables

mes $\widehat{P}$ = mes $\widehat{A}$
mes $\widehat{Q}$ = mes $\widehat{B}$
mes $\widehat{R}$ = mes $\widehat{C}$

3.2 RECONNAÎTRE DEUX TRIANGLES SEMBLABLES

Activité 1



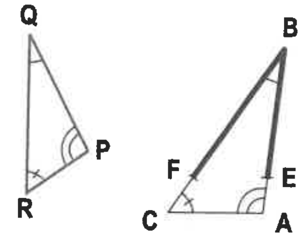
ABC et PQR sont deux triangles tels que : $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$.

On veut établir que les triangles PQR et ABC sont semblables.

Pour cela, on marque les points F de [BC] et E de [BA] tels que : BF = QR et BE = QP.

- Justifie que (FE) et (CA) sont parallèles.
- Justifie que les triangles PQR et EBF sont superposables.

Activité 2



ABC et PQR sont deux triangles tels que :
mes $\widehat{P}$ = mes $\widehat{A}$; mes $\widehat{Q}$ = mes $\widehat{B}$; mes $\widehat{R}$ = mes $\widehat{C}$.

On veut établir que les triangles PQR et ABC sont semblables.

Pour cela, on marque les points F de [BC] et E de [BA] tels que : BF = QR et BE = QP.

- Justifie que les triangles PQR et EBF sont superposables.
- Justifie que (FE) et (CA) sont parallèles.

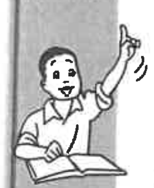
PROPRIÉTÉS

- **Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.**
- **Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.**

Exemples

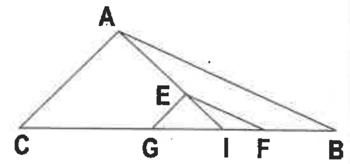
– Deux triangles équilatéraux sont semblables.
– Deux triangles isocèles rectangles sont semblables.

EXERCICES



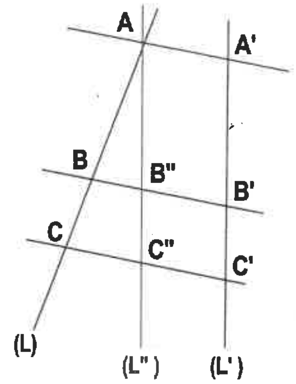
3.a ABC est un triangle, E est un point de [AB]. La droite parallèle à (BC) qui passe par E coupe (AC) en F. La droite parallèle à (AB) qui passe par F coupe la droite parallèle à (AC) qui passe par E au point D.
Démontre que les triangles ABC et DEF sont semblables.

3.b ABC est un triangle. I est un point de [BC], E un point de [AI], G et F les points de [BC] tels que :
(EF) // (AB) et (EG) // (AC).
Calcule EI et AC sachant que :
AB = 393 ; AI = 282 ; EF = 131 ; EG = 104.



4 Propriété de Thalès dans le cas général

Activité



(L) et (L') sont deux droites sécantes.
A, B, C sont des points de (L). A', B', C' sont les points de (L') tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles.

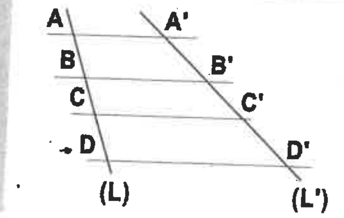
On veut démontrer que : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

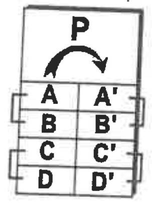
Pour cela, on trace la droite (L") passant par A, et parallèle à (L'). Elle coupe (BB') en B" et (CC') en C".

- Justifie que : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB"}{AC"}$.
- Justifie que : AB" = A'B' ; AC" = A'C'.
- Justifie que : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

PROPRIÉTÉ

Des droites parallèles découpent des segments de mesures proportionnelles sur deux droites qui leur sont sécantes.

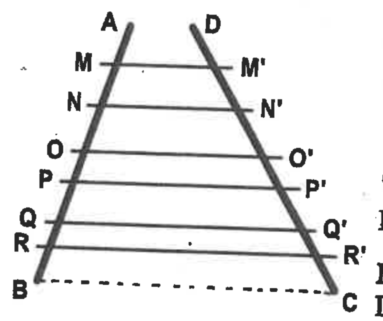




P est la projection sur (L') parallèlement à (AA').

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots$

Exemple 1



Pour la finition d'un mur de sa clôture, Kokou a confectionné une échelle. Une esquisse en est donnée ci-contre. L'unité de longueur est le cm. Les supports des traverses (MM'), (NN'), ..., (PP') et (RR') sont parallèles à (BC) et à (AD).
Calculons CR' et CQ' sachant que : AB = 180 ; CD = 198 ; QR = 20 ; RB = 30.

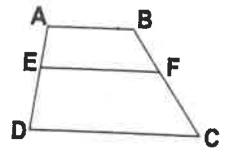
D'après la propriété : $\frac{CR'}{BR} = \frac{CD}{BA}$ et $\frac{CR'}{30} = \frac{198}{180}$.

Donc : CR' = 33.

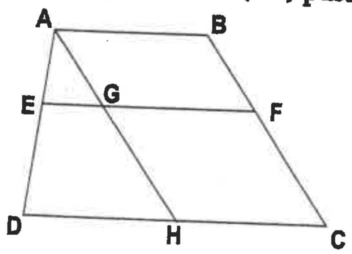
De même, on établit que : CQ' = 55.

Exemple 2

L'unité de longueur est le mm. ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que : AB = 20, BC = 30, CD = 40 et DA = 25.
Sur le côté [AD], on a marqué le point E tel que : AE = 10. F est le point d'intersection de (BC) avec la droite parallèle à (AB) passant par E.
Calcule EF.



Utilisons le procédé qui a permis de déduire la propriété générale de Thalès : construisons la droite parallèle à (BC) passant par A, qui coupe respectivement (EF) et (DC) en G et H.



D'après la conséquence de la propriété de Thalès : $\frac{AE}{AD} = \frac{EG}{DH}$

C'est-à-dire : $\frac{AE}{AD} = \frac{EF - GF}{DC - HC}$

Justifie que : AB = GF = HC.

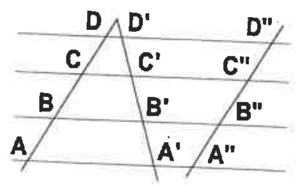
Donc : $\frac{10}{25} = \frac{EF - 20}{40 - 20}$; EF = 28

EXERCICE

4.a Sur la figure ci-contre, (AA'), (BB'), (CC'), (DD') sont des droites parallèles.

Indique, parmi les quotients suivants, ceux qui sont égaux.

$\frac{AB}{AD}$; $\frac{AB}{AC}$; $\frac{BC}{BD}$; $\frac{A'B'}{A'D'}$; $\frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{B'C'}{B'D'}$; $\frac{A''B''}{A''D''}$; $\frac{A''B''}{A''C''}$; $\frac{B''C''}{B''D''}$

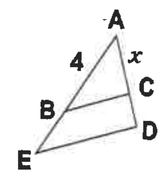
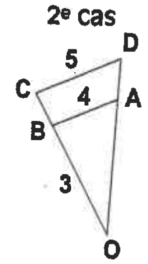
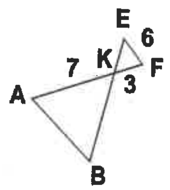


EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 PROPRIÉTÉ DE THALÈS DANS LE TRIANGLE

1 Calcule x dans chacun des cas ci-dessous :

1er cas	2e cas	3e cas
		
AE = 6 AD = 9 AC = x (BC) // (ED)	OC = x (BA) // (CD)	AB = x (AB) // (EF)

2 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que AB = 15 et AC = 5.
Les points M et N appartiennent respectivement aux côtés [AC] et [AB] et sont tels que AM = 3 ; AN = 9.
Justifie que : (MN) // (CB).

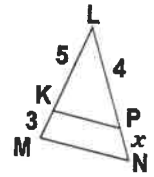
3 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que AB = 7,5 et AC = 3.
Les points M et N appartiennent respectivement aux demi-droites opposées [AB) et [AC) et sont tels que AM = 12,5 ; AN = 5.
Justifie que : (MN) // (CB).

4 ABCD est un parallélogramme.
Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [DC]. Les points M et N sont respectivement les points d'intersection des droites (DI) et (BJ) avec la droite (AC).
Démontre que : AM = MN = NC.

5 ABCD est un quadrilatère quelconque.
M est le point d'intersection des droites (AB) et (DC). La droite parallèle à (AC) passant par le point D coupe (AB) au point P. La droite parallèle à (DB) passant par le point C coupe (AB) au point Q.
Démontre que : $\frac{MP}{MA} = \frac{MB}{MQ}$.

2 UTILISATIONS DES PROPRIÉTÉS DE THALÈS

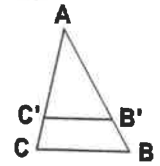
6 Calcule x et LN dans la situation suivante :



NP = x

(KP) // (MN)

7 L'unité de longueur est le centimètre.
Dans la figure ci-dessous : (B'C') // (BC).



1er cas : AB = 8 ; B'C' = 5 ; C'C = 2 ; B'B = 4.
Calcule B'A ; C'A ; BC et AC.

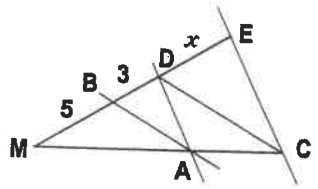
2e cas : AB' = 2 ; B'B = 3,5 ; C'C = 7 ; B'C' = 5.
Calcule C'A ; AC et BC.

8 A, B et C sont trois points alignés tels que : AC = $\frac{3}{2}$AB.
Place un point E qui n'appartient pas à la droite (AB). Construis le point F de [AC] tel que : AF = $\frac{3}{2}$ AE.

1) La droite passant par B et parallèle à (CE) coupe la droite (AE) au point G.
Démontre que : AG = $\frac{2}{3}$AE.

2) La droite passant par F et parallèle à (CE) coupe la droite (AB) au point H.
x est le nombre tel que AH = x AB.
Calcule x.

9 L'unité de longueur est le centimètre.



Sur l'esquisse ci-contre : (AB) // (CD) et (AD) // (CE).
Calcule x.

10 L'unité de longueur est le centimètre.
C et D sont deux points du plan tels que : CD = 7.

1) Construis un point N de la droite (CD) tel que $\frac{CN}{CD} = \frac{3}{5}$.

2) Trouve un point P de (CD), distinct de N tel que $\frac{CP}{CD} = \frac{3}{5}$.

3 TRIANGLES SEMBLABLES

11 ABC est un triangle.
Le point I appartient au côté [AB] et est différent de A et de B. (D) est la droite passant par le point C et parallèle à la droite (AB).
La droite passant par I et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) au point J et la droite (D) au point K.
Démontre que les triangles ABC et JCK sont semblables.
Cite les sommets homologues de ces triangles.

12 ($\mathscr{C}$) est un cercle de rayon r et de diamètre [AB]. La droite (D) est la tangente à ($\mathscr{C}$) en B. Une droite passant par A recoupe ($\mathscr{C}$) en E et coupe (D) en F. Démontre que : $AE \times AF = 4r^2$.

13 (A'A), (B'B) et (C'C) sont les hauteurs d'un triangle ABC dont H est l'orthocentre.
Démontre les égalités suivantes :

$A'A \times A'H = A'B \times A'C$

$HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$

$BC \times AA' = CA \times BB' = AB \times CC'$

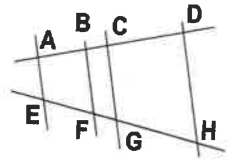
Les exercices 14 et 15 sont liés

14 ABC est un triangle rectangle en A et [AH] la hauteur relative à son hypoténuse.
1) Démontre que les triangles ABC et HAC sont semblables.
Démontre que :
$AC^2 = BC \times HC$; $AB \times AC = AH \times BC$
2) Démontre que les triangles HAB et HCA sont semblables.
Démontre que : $AH^2 = HB \times HC$.

15 [AB] est un segment de longueur 6 cm et H un point de [AB].
Construis un carré qui a pour aire $HA \times HB$.

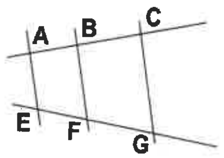
4 PROPRIÉTÉ DE THALÈS DANS LE CAS GÉNÉRAL

16 L'unité de longueur est le centimètre.
Dans la figure ci-dessous, les droites (AE), (BF), (CG) et (DH) sont parallèles.



1er cas : EF = 5 ; AC = 6 et AB = 4. Calcule EG.
2e cas : EH = 3,5 ; AB = 4 et AD = 7. Calcule EF.
3e cas : FG = 5 ; GH = 2,5 et CD = 1,5. Calcule BC.

17 L'unité de longueur est le centimètre.



Sur l'esquisse ci-contre :
– les droites (AE), (BF) et (CG) sont parallèles ;
– les points A, B, C, E, F et G sont tels que : AB = 2 ; BC = 5 et EF = 1.
Calcule EG.

APPROFONDISSEMENT

18 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD], (AB < CD). I est le milieu de [AB].
Les droites (AD) et (BC) se coupent en K.
Les droites (AC) et (BD) se coupent en L.
Les droites (KI) et (DC) se coupent en J.
Démontre que J est le milieu de [DC].
Les droites (IL) et (CD) se coupent en J'.
Démontre que J' est le milieu de [DC].
Justifie que les points I, J, K et L sont alignés.

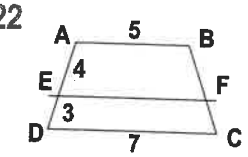
19 ABC est un triangle. M est le point de [AB] tel que AM = AC.
La droite parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.
Démontre que : $AN \times AB = AC^2$.
Trouve un programme de construction d'un segment de longueur ℓ tel que : $3\ \ell = 16$.

20 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].
E est le point de [AD] tel que : $\frac{AE}{DE} = \frac{m}{n}$.
On pose : AB = a et CD = b.

La droite parallèle à (DC) qui passe par E coupe (BC) en F, (AC) en G et (BD) en H.
Calcule les quotients $\frac{DA}{DE}$ et $\frac{AD}{AE}$ en fonction de m et n.
Calcule EG, EH, FG, FH et EF en fonction de m, n, a et b.
Justifie que [EF] et [GH] ont le même milieu.

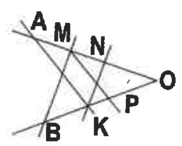
21 Dans un trapèze EFGH de bases [EF] et [HG], on sait que : HG > EF.
Par le milieu I du côté [EH], on trace la droite parallèle à (EF). Cette droite coupe respectivement les droites (EG), (FH) et (FG) aux points K, J et L.
1) Démontre que : $IL = \frac{EF + HG}{2}$.
2) Compare IJ et KL.
3) Exprime JK en fonction de EF et HG.

22



Sur l'esquisse ci-contre, les droites (AB), (EF) et (DC) sont parallèles.
Calcule EF.

23

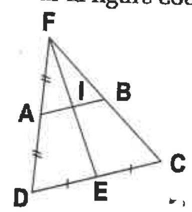


Sur l'esquisse ci-contre, (AK)//(MP) et (KN)//(BM).
Démontre que : (AB)//(NP).

24 (D) et (L) sont deux droites sécantes en O. M, N et P sont trois points de (D). M' et N' sont deux points de (L) tels que les droites (MM') et (NN') sont parallèles. (D') est la droite passant par M' et parallèle à la droite (N'P). Q est le point d'intersection de (D) et (D').
Deux droites parallèles passant par Q et P coupent respectivement (L) en Q' et P'.
Démontre que : (MQ') // (NP').

25 ABC est un triangle.
E est le point du côté [AB] tel que : $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$.
La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) au point F.
La droite parallèle à (AB) passant par F coupe la droite (BC) au point G.
La droite parallèle à (AC) passant par G coupe la droite (AB) au point H.
Les droites (EF) et (GH) se coupent au point I.
Démontre que :
1) $\frac{AH}{AB} = \frac{1}{3}$.
2) H est le milieu du segment [AE].
3) $\frac{HI}{AF} = \frac{1}{2}$.

26 Sur la figure codée ci-dessous, (AB) // (DC).



Démontre que le point I est le milieu du segment [FE] et est aussi le milieu du segment [AB].

27 ABC est un triangle. I est le milieu du côté [AB]. La droite passant par I et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) au point J.
La droite passant par le point J et parallèle à la droite (AB) coupe la droite (BC) au point K.
M est le point d'intersection des droites (IC) et (JK).
Démontre que :
1) (IK) // (AC)
2) M est le milieu du segment [JK].

28 ABC est un triangle. E est un point de la droite (AB). La droite passant par E et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) au point F.
La droite passant par F et parallèle à la droite (EC) coupe la droite (AB) au point H.
Démontre que : $AE^2 = AH \times AB$.

29 L'unité de longueur est le centimètre.
A, B et C sont trois points alignés tels que :
$B \in [AC]$, AB = 5 et AC = 7.
1) Construis un parallélogramme AMNP de centre O tel que :
$C \in [MN]$, $B \in [MO]$, $B \neq M$ et $B \neq O$.
2) La droite (AB) coupe la droite (NP) au point D. Calcule DC.

30 ABCD est un quadrilatère quelconque.
Les points I, J, O, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [IJ], [AC] et [BD].
Démontre que O est le milieu du segment [KL].

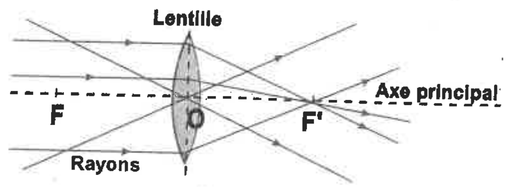
Les exercices 31 et 32 sont liés

31 **Théorème de Ménélaüs.**
ABC est un triangle.
Une droite (D) coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement aux points M, N et P.
Démontre que : $\frac{PB}{PC} \times \frac{NC}{NA} \times \frac{MA}{MB} = 1$.

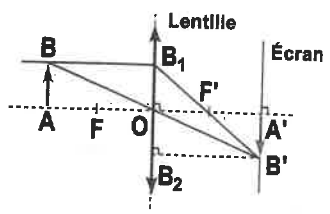
(Tu peux utiliser la droite passant par le point C et parallèle à (AB).)

32 Théorème de Céva.
ABC est un triangle.
A', B' et C' sont trois points tels que
A' ∈ [BC], B' ∈ [AC] et C' ∈ [AB].
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en M.
Démontre que : $\frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} \times \frac{AC'}{C'B} = 1$
(Tu peux utiliser la droite passant par le point A et parallèle à (BC).)

33 Lentille convergente
Une lentille convergente possède deux foyers F et F', symétriques par rapport au centre optique O de la lentille et a pour propriété de dévier les rayons lumineux qui arrivent parallèlement à son axe vers un des foyers ; les rayons qui passent par le centre O de la lentille ne sont pas déviés. OF = OF' = f.
f est appelé distance focale de la lentille ;
(FF') s'appelle l'axe principal.

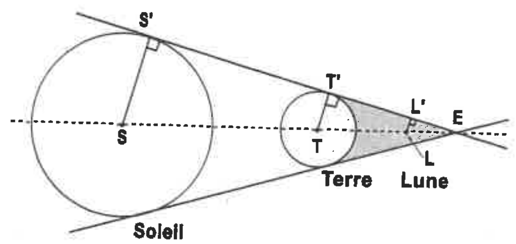


Dans la pratique, on néglige l'épaisseur de la lentille.
On considère une lentille convergente de 5 cm de distance focale que l'on éclaire par un faisceau lumineux parallèle à son axe principal.
On place, devant la lentille, un objet plan de 3 cm de hauteur, posé sur l'axe principal à 8 cm du centre O (sur la figure, cet objet est représenté par le segment [AB]). On recueille l'image inversée [A'B'] de [AB] sur un écran placé perpendiculairement à l'axe principal comme indiqué ci-dessous.



1) Fais une figure en vraie grandeur.
2) Calcule la distance de l'écran à la lentille et la hauteur de l'image de l'objet.
Vérifie sur ton dessin.

34 Éclipse de Lune
L'unité de longueur est le kilomètre.
Le Soleil éclairant la Terre, il se forme derrière celle-ci une zone d'ombre.

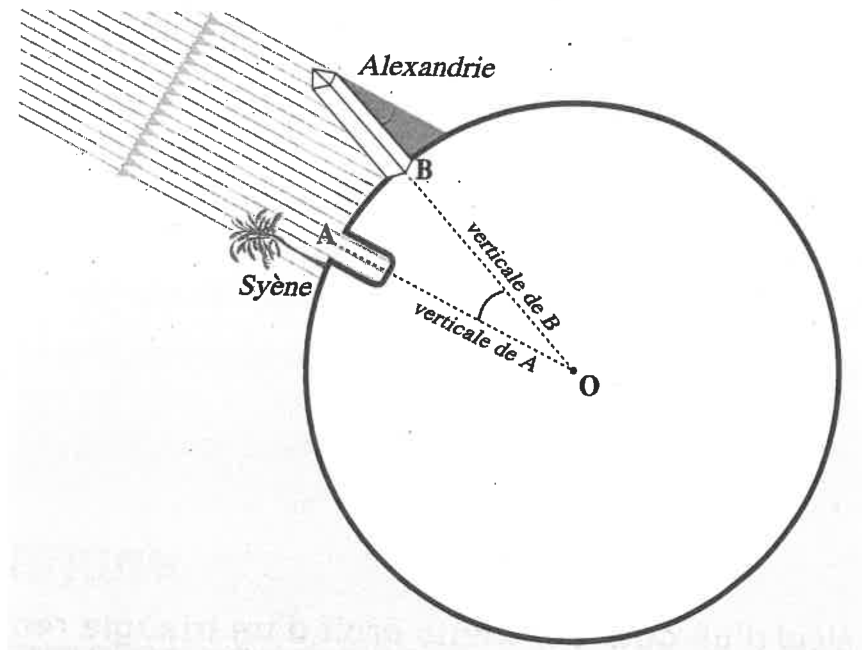


SS' ≅ 696 000 ; TT' ≅ 6 360 et
ST ≅ 149 600 000.
Le centre L de la Lune est à environ 382 000 km du centre T de la Terre.
Sur la figure, la Lune occupe une position telle que son centre L est un point du segment [TE].
Désignons par L' le projeté orthogonal de L sur (S'E).
1) Calcule TE.
2) Calcule LL'.
3) Sachant que le rayon de la Lune est d'environ 1 738 km, explique pourquoi celle-ci est entièrement dans la zone d'ombre de la Terre.

La Terre étant représentée par un disque de 1 cm de diamètre, le Soleil aurait dû être représenté par un disque de 1,09 m. Quant à la distance TS, elle devrait être représentée par un segment de 117,6 m !!!
Le dessin ci-dessus est une esquisse, non un dessin à l'échelle.

2

Triangle rectangle
Trigonométrie



Ératosthène (v. 284 – v. 192 av. J.-C.), mathématicien et astronome grec qui vivait à Alexandrie (Égypte), a utilisé la Trigonométrie ou « Art de mesurer les triangles » pour calculer approximativement le rayon de la Terre.

SOMMAIRE

1 Propriété de Pythagore

1.1 PROPRIÉTÉS

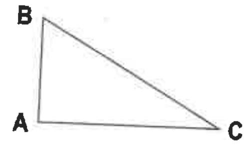
PROPRIÉTÉ DE PYTHAGORE

• Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

ABC est un triangle

ABC est rectangle en A

$BC^2 = AB^2 + AC^2$



RÉCIPROQUE DE LA PROPRIÉTÉ DE PYTHAGORE

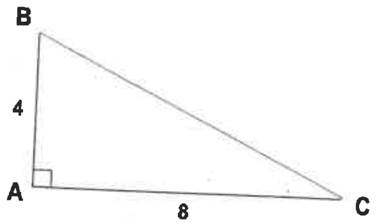
• Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectamgle.

ABC est un triangle

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

ABC est rectangle en A

Calcul de l'hypoténuse d'un triangle rectangle

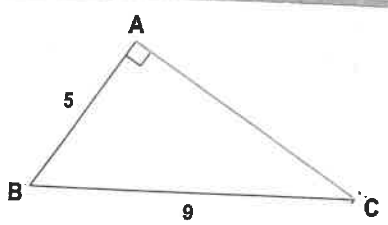


ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 4 et AC = 8
Calculons BC.

On sait que $BC^2 = AB^2 + AC^2$
$= 16 + 64 = 80$

D'où $BC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Calcul d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle



ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 5 et BC = 9
Calculons AC.

On sait que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Par conséquent $AC^2 = BC^2 + AB^2$
$= 81 + 25 = 56$

D'où $AC = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.

EXERCICES

1.a ABC est un triangle rectangle en A, tel que :

a) AB = 5 et AC = 7 ; calcule BC

b) AB = 5 et BC = 10 ; calcule AC.

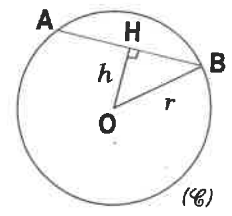
1.b Quelle est la nature du triangle EFG dans chacun des cas suivants :

a) EF = 4 ; EG = 8 ; FG = 7

b) $EF = \sqrt{75}$; $EG = 5\sqrt{2}$; FG = 5

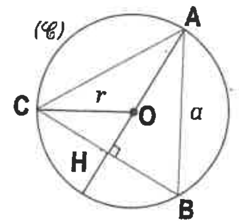
1.2 PROPRIÉTÉS DE PYTHAGORE ET CALCUL DE DISTANCES

Corde d'un cercle



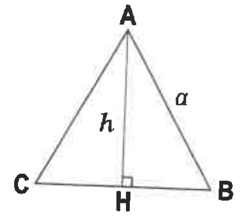
• Démontre que $AB = 2\sqrt{r^2 - h^2}$

Triangle équilatéral et cercle circonscrit



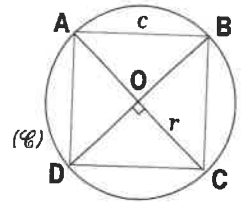
• Démontre que $a = r\sqrt{3}$

Hauteur d'un triangle équilatéral



• Démontre que $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Carré inscrit dans un cercle



• Démontre que $c = r\sqrt{2}$.

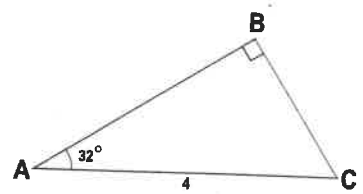
EXERCICE

1.c Calcule l'aire d'un triangle équilatéral de côté 4 cm.
Calcule le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

2 Cosinus et sinus d'un angle aigu

2.1 DÉFINITIONS

Activité 1

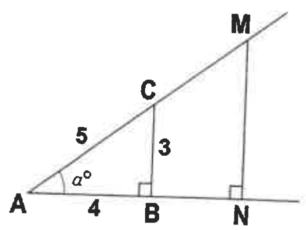


• Construis un triangle ABC rectangle en B tel que :
AC = 4 et mes $\widehat{A} = 32°$.

• Mesure la longueur de [BC]. Peux-tu calculer BC ?

L'objet de ce chapitre est de te donner les moyens d'effectuer ce calcul.

Activité 2



ABC est un triangle rectangle en B, tel que : mes $\widehat{A} = a°$.
On veut caractériser l'angle $\widehat{A}$ (ou sa mesure) par les côtés du triangle ABC.

• Calcule $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{BC}{AC}$.

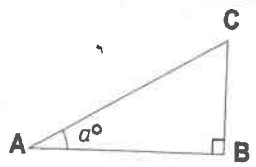
M est un point de (AC) et N son projeté orthogonal sur (AB).

• Justifie que $\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM}$ et $\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{AM}$.

Les nombres $\frac{AM}{AM}$ et $\frac{MN}{AM}$ gardent chacun une valeur constante pour tout point M de (AC).
Nous admettrons que ces nombres ne dépendent que de l'angle $\widehat{A}$.
Le premier, égal à $\frac{AB}{AC}$ est le **cosinus** de l'angle $\widehat{A}$ ou de sa mesure $a°$. Il est noté cos $\widehat{A}$ ou cos $a°$.
Le second, égal à $\frac{BC}{AC}$ est le **sinus** de l'angle $\widehat{A}$ ou de sa mesure $a°$. Il est noté sin $\widehat{A}$ ou sin $a°$.

DÉFINITIONS

Dans un triangle rectangle,
• on appelle *sinus* d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
• on appelle *cosinus* d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.

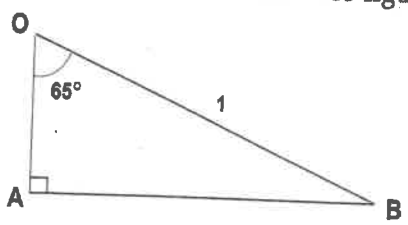


$$\cos a° = \cos \widehat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{Côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin a° = \sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

Déterminer graphiquement le sinus et le cosinus d'un angle aigu

L'unité de longueur est le dm. Les figures ci-dessous sont réalisés à l'échelle $\frac{1}{2}$.

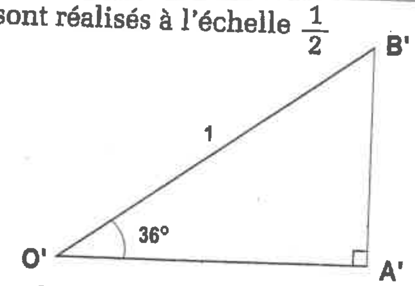


Le triangle OAB rectangle en A est tel que :
OB = 1 et mes $\widehat{AOB}$ = 65°

Donc : $\cos \widehat{AOB} = \frac{OA}{OB} = OA$

La mesure du côté [OA] permet de trouver le cosinus de l'angle $\widehat{AOB}$:

$\cos \widehat{AOB} = \cos 65° \approx 0{,}42$



Le triangle O'A'B' rectangle en A' est tel que :
OB' = 1 et mes $\widehat{A'O'B'}$ = 36°

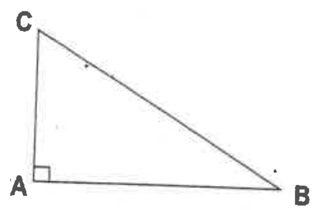
Donc : $\sin \widehat{A'O'B'} = \frac{A'B'}{OB'} = A'B'$

La mesure du côté [A'B'] permet de trouver le sinus de l'angle $\widehat{A'O'B'}$:

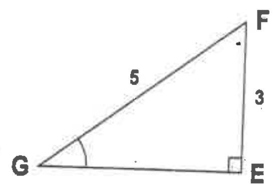
$\sin \widehat{A'O'B'} = \sin 36° \approx 0{,}59$

EXERCICES

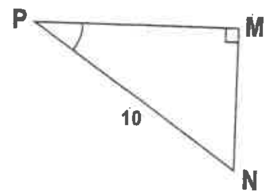
2.a



Exprime en fonction des côtés du triangle rectangle ABC :
cos $\widehat{B}$; sin $\widehat{B}$; cos $\widehat{C}$; sin $\widehat{C}$



Calcule : cos $\widehat{G}$ et cos $\widehat{F}$
Calcule : sin $\widehat{G}$ et sin $\widehat{F}$



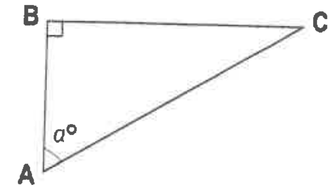
cos $\widehat{P} = \frac{3}{5}$; calcule PM.
sin $\widehat{P} = \frac{4}{5}$; calcule MN.

2.b Construis le triangle ABC rectangle en A, tel que : mes $\widehat{B}$= 40° et AB = 10.
L'unité de longueur est le centimètre. Détermine BC à l'aide d'un instrument.
Calcule BC, sachant que : cos 40° = 0,766

2.c Détermine graphiquement sin 15° et cos 75°.

2.2 SOMME DES CARRÉS DU COSINUS ET DU SINUS D'UN ANGLE

Activité

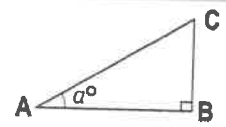


ABC est un triangle rectangle en B tel que : mes $\widehat{A} = a°$.
On a : AB < AC ; BC < AC.
• Justifie que : $0 < \frac{AB}{AC} < 1$; $0 < \frac{BC}{AC} < 1$.
• Calcule : $(\cos a°)^2 + (\sin a°)^2$.
Notation : $(\cos a°)^2$ se note aussi $\cos^2 a°$.

PROPRIÉTÉS

Pour tout angle aigu de mesure $a°$, on a :

$$0 < \cos a° < 1 \quad ; \quad 0 < \sin a° < 1 \quad ; \quad \cos^2 a° + \sin^2 a° = 1$$



$0 < \cos \widehat{A} < 1$
$0 < \sin \widehat{A} < 1$

$\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$

Exemple de calcul du sinus ou du cosinus d'un angle

Le cosinus d'un angle aigu $\widehat{A}$ est égal à $\frac{3}{5}$. Calculons le sinus de cet angle.

On sait que $\cos^2 \widehat{A} + \sin \widehat{A} = 1$.

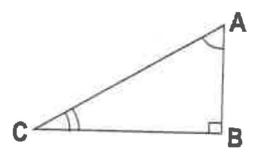
Par conséquent, $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; $\sin \widehat{A} = \frac{4}{5}$ (car $\sin \widehat{A} > 0$).

EXERCICE

2.d Le sinus d'un angle aigu $\widehat{A}$ est égal à $\frac{1}{3}$. Calcule le cosinus de cet angle.
Le cosinus d'un angle aigu $\widehat{B}$ est égal à $\frac{2}{5}$. Calcule le sinus de cet angle.

2.3 COSINUS ET SINUS D'ANGLES COMPLÉMENTAIRES

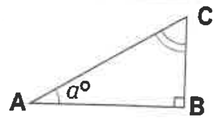
Activité



ABC est un triangle rectangle en B.
Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont donc complémentaires.
Compare : cos $\widehat{A}$ et sin $\widehat{C}$; sin $\widehat{A}$ et cos $\widehat{C}$.

PROPRIÉTÉ

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.



$\cos (90 - a)^o = \sin a^o$ $\quad$ $\sin (90 - a)^o = \cos a^o$

$\cos \widehat{C} = \sin \widehat{A}$ $\quad$ $\sin \widehat{C} = \cos \widehat{A}$

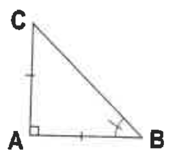
EXERCICES

2.e ABC est un triangle rectangle en A. Calcule $\sin \widehat{B}$, $\sin \widehat{C}$ et $\cos \widehat{C}$, sachant que : $\cos \widehat{B} = 0{,}1$.

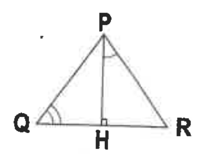
2.f Calcule sin 50° et cos 76°, sachant que : $\cos 40^o \approx 0{,}643$; $\sin 14^o \approx 0{,}242$.

2.4 COSINUS ET SINUS D'ANGLES PARTICULIERS

a^o	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



ABC est isocèle rectangle en A.

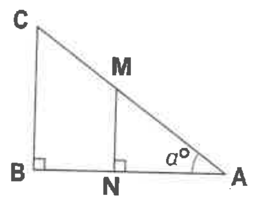


PQR est équilatéral.

Ces triangles permettent d'obtenir les cosinus et sinus de 30°, 45° et 60°.

3 Tangente d'un angle aigu

Définition et propriété de la tangente d'un angle aigu



ABC est un triangle rectangle en B, tel que mes $\widehat{A} = a^o$.
M est un point de (AC) et N son projeté orthogonal sur (AB).

• Justifie que : $\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN}$.

$\frac{MN}{AN}$ garde une valeur constante pour tout point M de (AC).

Nous admettrons que ce nombre ne dépend que de l'angle $\widehat{A}$.

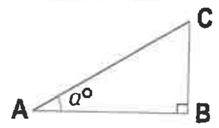
Ce nombre qui est égal à $\frac{BC}{AB}$ est la **tangente** de l'angle $\widehat{A}$ ou de sa mesure a^o.

Il est nôté $\tan \widehat{A}$ ou $\tan a^o$.

• Justifie que : $\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$

DÉFINITION

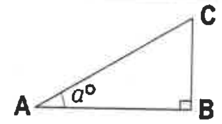
Dans un triangle rectangle, on appelle *tangente* d'un angle aigu (ou de sa mesure) le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent.



$$\tan a^o = \tan \widehat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{A}}{\text{Côté adjacent à } \widehat{A}}$$

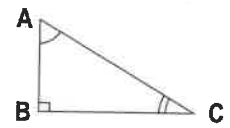
PROPRIÉTÉ

La tangente d'un angle aigu est égale au quotient du sinus de cet angle par son cosinus.



$$\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} \; ; \; \tan \widehat{A} = \tan a^o = \frac{\sin a^o}{\cos a^o}$$

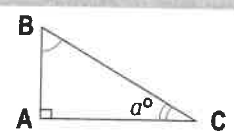
Tangentes d'angles complémentaires



ABC est un triangle rectangle en B.
Calcule $\tan \widehat{A} \times \tan \widehat{C}$

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle rectangle, les tangentes des deux angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre.

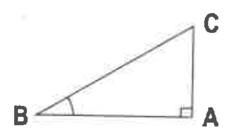


$\tan a^o \times \tan (90 - a)^o = 1$

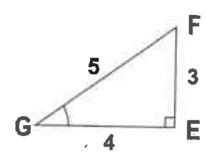
$\tan \widehat{B} \times \tan \widehat{C} = 1$

EXERCICES

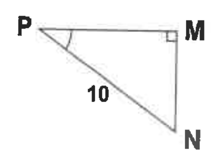
3.a



Exprime en fonction des côtés du triangle rectangle ABC :
$\tan \widehat{B}$ et $\tan \widehat{C}$



Calcule :
$\tan \widehat{G}$ et $\tan \widehat{F}$



$\tan \widehat{P} = 0{,}750$;
calcule MN

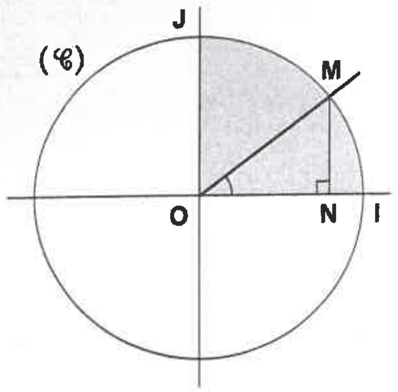
3.b Dans le triangle ABC, rectangle en B, calcule $\tan \widehat{A}$ et $\tan \widehat{C}$ sachant que : $\tan \widehat{A} = \frac{3}{5}$.

3.c Calcule tan 45°, tan 30° et tan 60°.

3.d Détermine graphiquement tan 25°.

4 Utilisation de la trigonométrie

4.1 UTILISATION D'UN REPÈRE ORTHONORMÉ

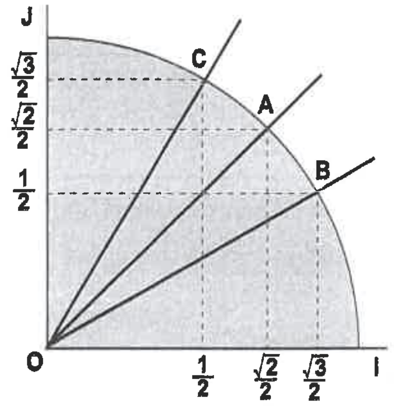


(O,I,J) est un repère orthonormé.
(𝒞) est le cercle de centre O et de rayon 1.

$$\cos \widehat{IOM} = \frac{ON}{OM} = ON.$$

$$\sin \widehat{IOM} = \frac{NM}{OM} = NM.$$

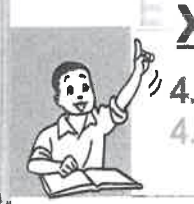
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos \widehat{IOM} = \text{abscisse de M} \\ \sin \widehat{IOM} = \text{ordonnée de M} \end{array}}$$



On peut lire directement dans le plan, certaines informations concernant le cosinus et le sinus.
BC = AB + AC
– Les cosinus des angles aigus et les mesures de ces angles sont rangés dans des ordres contraires.

– Les sinus des angles aigus et les mesures de ces angles sont rangés dans le même ordre.

EXERCICES



4.a Range dans l'ordre croissant : sin 15°, cos 20°, sin 35°, cos 45°, cos 60°, sin 65° et sin 80°.

4.b Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), donne une méthode de construction d'un angle de côté [OI) et de mesure 30 °, 60° ou 45 °.

4.2 UTILISATION D'UNE TABLE TRIGONOMÉTRIQUE

Il existe des tables, appelées tables trigonométriques, qui donnent les arrondis d'ordre 3 de cos a° et sin a° pour chaque nombre entier a de l'intervalle [0;90].

Lire le cosinus ou le sinus d'angles aigus

Degrés	Sin	Cos	
0	0,000	1	90
1	0,017	0,999	89
2	0,035	0,999	88
3	0,052	0,998	87
...	...	...	...
20	0,342	0,939	70
...	...	...	...
32	0,530	0,848	58
...	...	...	...
44	0,694	0,719	46
45	0,707	0,707	45
	Cos	Sin	Degrés

Lire sin 20° (0° < 20° < 45°)

Dans la table, la valeur 20 se trouve dans la colonne marquée degrés, en haut. Le sinus est lu sur la même ligne, dans la colonne marquée sin, en haut.

On lit pour sin 20° : 0,342 et on écrit sin 20° ≈ 0,342

• Trouve dans la table sin 43° et cos 35°.

Lire sin 58° (45° < 58° < 90°)

Dans la table, la valeur 58 se trouve dans la colonne marquée degrés, en bas. Le sinus est lu sur la même ligne, dans la colonne marquée sin, en bas.

On lit pour sin 58° : 0,848 et on écrit sin 58° ≈ 0,848

• Trouve dans la table sin 80° et cos 71°.

58° et 32° sont complémentaires. Le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre. Dans une table trigonométrique, ils figurent sur la même ligne.

Trouver la mesure d'un angle, connaissant son sinus ou son cosinus.

Degrés	Sin	Cos	
0	0,000	1,000	90
1	0,017	1,000	89
2	0,035	0,999	88
...	...	...	...
31	0,515	0,857	59
...	...	...	...
...	...	...	
44	0,695	0,695	46
45	0,707	0,707	45
	Cos	Sin	Degrés

La valeur donnée se trouve dans la table.

On donne : cos $\widehat{A}$ = 0,515

• *Recherchons une valeur approchée de mes $\widehat{A}$*

On retrouve dans la table la valeur 0,515 dans une colonne où cos se trouve marqué au bas de la table ; la valeur correspondante se lit donc dans la colonne marquée degrés en bas.

0,515 est l'arrondi d'ordre 3 de cos 59°.

Donc mes $\widehat{A}$ ≈ 59°

Degrés	Sin	Cos	
0	0,000	1,000	90
1	0,017	1,000	89
2	0,035	0,999	88
3	0,052	0,998	87
...	...	...	...
40	0,642	0,766	50
41	0,656	0,755	49
...	...	...	...
44	0,695	0,719	46
45	0,707	0,707	45
	Cos	Sin	Degrés

La valeur ne se trouve pas dans la table.

On donne : sin $\widehat{B}$ = 0,758

• *Recherchons un encadrement de mes $\widehat{B}$*

0,758 ne se trouve pas dans la table.
On peut l'encadrer par les nombres 0,755 et 0,766 qui sont dans la table.

On a : 0,755 < sin $\widehat{B}$ < 0,766

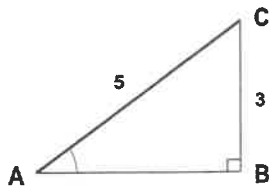
Comme les sinus d'angles aigus et les mesures de ces angles sont rangés dans le même ordre.

On a : 49° < sin $\widehat{B}$ < 50°

En pratique, dans un calcul, on choisira indifféremment 49° ou 50°, comme valeur approchée de la mesure de $\widehat{B}$.

4.3 CALCULS DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Trouver un encadrement de la mesure d'un angle aigu.



ABC est un triangle rectangle en B tel que : BC = 3 et AC = 5.
Recherchons un encadrement de la mesure de l'angle $\widehat{A}$.

On a : $\sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

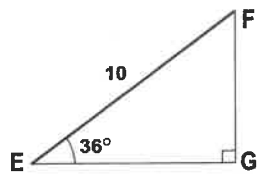
Dans la table : $\sin 36° < 0{,}6 < \sin 37°$

Donc : $36° < \text{mes } \widehat{A} < 37°$

On choisira 36° ou 37°, comme valeur approchée de mes $\widehat{A}$.

Trouver une valeur approchée de la mesure d'un côté

EFG est un triangle rectangle en G tel que : EF = 10 et mes $\widehat{E}$ = 36°.
Recherchons une valeur approchée de EG.



Par définition, $\cos \widehat{FEG} = \frac{EG}{EF}$; $\cos 36° = \frac{EG}{10}$

Donc : $EG = 10 \times \cos 36°$.

Or $\cos 36° \approx 0{,}809$;

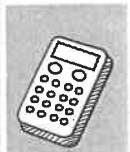
par conséquent $EG \approx 8{,}09$

EXERCICES

4.c ABC est un triangle rectangle en A, tel que : AB = 30 et mes $\widehat{B}$ = 27°.
Trouve une valeur approchée de BC et CA.

4.d EFG est un triangle rectangle en E tel que : FG = 16 et EG = 10.
Trouve un encadrement de la mesure de l'angle $\widehat{F}$.

Utilisation de la calculatrice



Régler la calculatrice sur la position « Degré » (les choix sont : Degré, Radian, ou Grade)

Pour calculer sin 25°, entrer :

(2)(5)(sin) 0,4226 18261

Pour trouver la mesure de l'angle dont le cosinus est égal à 0,927, entrer :

(0)(.)(9)(2)(7)(inv)(cos) 22,28 1335

Pour calculer tan 56°, entrer :

(5)(6)(tan) 1,482560969

Pour trouver mes $\widehat{R}$ sachant que tan $\widehat{R}$ = 1,428, entrer :

(1)(.)(4)(2)(8)(inv)(tan) 54,99720992

Complète le tableau suivant en utilisant la calculatrice.

$a°$	6	10		47			72			89
cos $a°$								0,242		
sin $a°$					0,5					
tan $a°$			0,488			1,732			11,430	

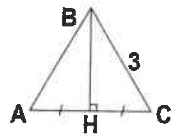
EXERCICES

1 PROPRIÉTÉ DE PYTHAGORE

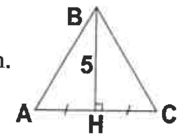
1 L'unité de longueur est le centimètre.
On donne : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.
ABCD est un carré.
Dans chacun des cas ci-dessous, calcule AC ; calcule ensuite l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de AC.
1er cas : AB = 5 ; ***2e cas :*** AB = 4

2 L'unité de longueur est le centimètre.
ABCD est un carré tel que : $AC = 6\sqrt{2}$.
Calcule la longueur du côté de ce carré.

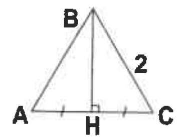
3 ABC est un triangle équilatéral de côté 3 cm.
1) Calcule BH.
2) On donne :
$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$
Calcule l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de BH.



4 ABC est un triangle équilatéral de hauteur 5 cm.
Calcule la longueur du côté de ce triangle.



5 ABC est un triangle équilatéral de côté 2 cm.
1) Calcule BH.
2) Énonce un programme de construction d'un segment [MP] tel que $MP = \sqrt{3}$.



6 ACE est un triangle équilatéral.
Le point D est le projeté orthogonal du sommet A sur la droite (CE).
a) Construis un point B tel que le triangle ABD soit équilatéral.
b) Compare les aires des triangles ACE et ABD.

7 ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
[AB] est une corde de ($\mathscr{C}$) de 3 cm.
Calcule la distance de O à cette corde.

2 SINUS ET COSINUS D'UN ANGLE AIGU

8 ABC est un triangle rectangle en B tel que :
AC = 7,5 et BC = 4,5.
Calcule sin $\widehat{A}$.

9 ABC est un triangle rectangle en A tel que :
AC = 10,8 et BC = 13,5.
Calcule cos $\widehat{C}$.

10 L'unité de longueur est le centimètre.
Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :
AC = 32,5, $\sin \widehat{A} = \frac{5}{13}$ et $\cos \widehat{A} = \frac{12}{13}$.
Calcule AB et BC.

11 Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :
$\sin \widehat{A} = \frac{2}{3}$.
Calcule cos $\widehat{A}$.

12 Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :
$\cos \widehat{A} = \frac{9}{41}$.
Calcule sin $\widehat{A}$.

13 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en B tel que :
mes $\widehat{A}$ = 30° et AB = 2.
Calcule AC et BC.

14 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en B tel que :
mes $\widehat{A}$ = 60° et AC = 2.
Calcule BC et AB.

15 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que :
AB = 2 et BC = 1,5.
Calcule cos $\widehat{C}$.

3 TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

16 ABC est un triangle rectangle en A tel que :
AB = 7,5 et AC = 12,5.
Calcule tan $\widehat{C}$.

17 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en B tel que :

tan $\widehat{A} = \frac{4}{3}$ et BC = 2.
Calcule AB et AC.

18 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en B tel que :
mes $\widehat{A}$ = 60° et BC = 12.
Calcule AB et AC.

19 ABC est un triangle rectangle en B tel que :
tan $\widehat{C} = \sqrt{2} - 1$.
Calcule tan $\widehat{A}$.

20 ABC est un triangle rectangle en B.
Calcule tan $\widehat{A}$ lorsque :
1) sin $\widehat{A} = \frac{1}{3}$ et cos $\widehat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
2) sin $\widehat{C} = \frac{3}{5}$ et cos $\widehat{C} = \frac{4}{5}$.

4 UTILISATION DE LA TRIGONOMÉTRIE

21 Trouve dans la table :
1) sin 21°, cos 37° et tan 44°.
2) sin 85° , cos 63° et tan 77°.

22 sin $\widehat{A}$ = 0,799 ; cos $\widehat{B}$ = 0,946
et tan $\widehat{C}$ = 1,111 .
En utilisant la table, trouve une valeur approchée de la mesure de chacun des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

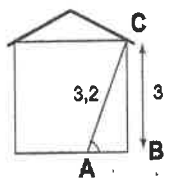
23 sin $\widehat{A}$ = 0,832 ; cos $\widehat{B}$ = 0,954 ;
tan $\widehat{C}$ = 1,350 ; sin $\widehat{D}$ = 0,44 ; cos $\widehat{E}$ = 0,345
et tan $\widehat{F}$ = 0,710 .
En utilisant la table, trouve un encadrement d'amplitude 1°, de la mesure de chacun des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$.

24 On donne $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.
1) Trouve l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\frac{\sqrt{5}+1}{}$, de $\frac{\sqrt{5}-1}{}$.
2) Trouve un encadrement de a et de b sachant que cos $a° = \frac{\sqrt{5}+1}{}$ et cos $b° = \frac{\sqrt{5}-1}{}$.

25 Utilise une calculatrice pour compléter le tableau ci-dessous.
Dans les cases de la première ligne du tableau, tu écriras des valeurs approchées entières pour les mesures des angles.
Dans les autres cases, tu écriras des arrondis d'ordre 3.

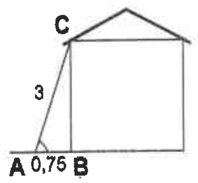
$a°$	7°	21°			
sin $a°$				0,951	
cos $a°$			0,574		
tan $a°$					0,675

26 En attendant les ouvriers et pour soutenir le plafond de son salon, M. Houegbe cale une poutre en dessous de celui-ci (en C sur la figure). Cette poutre a une longueur de 3,2 m. Son point de contact C avec le plafond est à 3 m du sol.



1) Calcule la mesure de l'angle formé par la poutre et le sol.
2) Calcule la distance AB du pied de la poutre au mur du salon.

27 Pour travailler sur son toit, M. Tapchom pose une échelle de 3 m contre le mur extérieur de sa maison.
Le pied de l'échelle est à 0,75 m du mur.



1) Calcule la mesure de l'angle formé par l'échelle et le sol.
2) Calcule la distance BC du pied du mur au point de contact de l'échelle avec ce mur.

APPROFONDISSEMENT

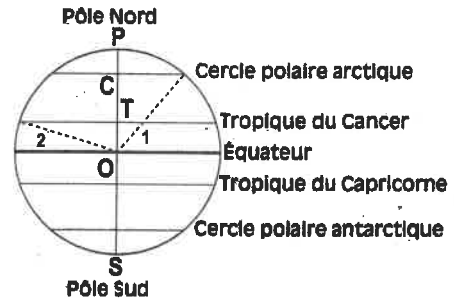
28 MNPQ est un carré.
a) Construis un carré qui a pour aire le double de l'aire de MNPQ.
b) Construis un carré qui a pour aire le triple de l'aire de MNPQ.

29 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que :
AB = 5, mes $\widehat{A}$ = 45° et mes $\widehat{C}$ = 30°.
Le point H est le projeté orthogonal du sommet B sur la droite (AC).
Calcule AH, BH, BC, HC et AC.

30 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle équilatéral de hauteur [AH] tel que : AB – AH = $\sqrt{3}$.
Calcule l'aire de ce triangle équilatéral.

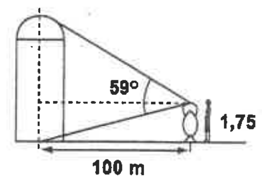
31 Le pare-brise d'une voiture est balayé par deux essuie-glaces de longueur 25 cm. Ces deux essuie-glaces sont articulés autour de deux points A et B distants de 25 cm. Chacun d'eux balaie ainsi un demi-disque.
Fais une figure.
Donne l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de l'aire ainsi balayée. ($\pi \approx 3,14$)

32 L'unité de longueur est le km.
Le cercle (€) de centre O représente la Terre.
Le rayon de la Terre est d'environ 6 400 km.
Les cercles polaires sont situées entre 66° et 67° Nord et entre 66° et 67° Sud.
Les tropiques sont situés entre 23° et 24° Nord et entre 23° et 24° Sud.



Donne un encadrement :
1) de la mesure de chacun des angles $\widehat{O_1}$ et $\widehat{O_2}$.
2) de OT, TC et CP.
3) du périmètre de chacun des cercles suivants :
- Cercle Polaire Arctique;
- Tropique du Capricorne.

33 M^{lle} Mangui, en visite à YAMOUSSOUKRO, est étonnée par la hauteur de la basilique Notre Dame de la Paix.



À 100 mètres du centre de la basilique, elle la voit sous un angle de 59°. Sachant que la taille de M^{lle} Mangui est 1,75 m, calcule la hauteur de la basilique

34 Pour faciliter l'écoulement des eaux usées de sa maison d'habitation, M. Soma demande à l'entrepreneur de poser une canalisation cylindrique de façon à ce que l'inclinaison de celle-ci soit de 15 cm tous les 2 mètres.
Fais un croquis.
Calcule la mesure de l'angle formé par cette canalisation et l'horizontale.

35 ABC est un triangle rectangle en A.
Sans utiliser de calculatrice, ni de table, calcule tan $\widehat{B}$ dans chacun des cas suivants :
1) cos $\widehat{B}$ = 0,6 *2)* sin $\widehat{B} = \frac{8}{17}$.

Dans les exercices 36, 37 et 38, *lorsqu'on parle d'angle de la route avec l'horizontale, il s'agit de celui du croquis ci-contre.*

36 Pour avertir les automobilistes et surtout les conducteurs de poids lourds, la Sécurité Routière place habituellement des panneaux lorsque la route est à forte pente.

En supposant que la route soit rectiligne, une pente de 6% indique au conducteur qu'il et descendu de 6 mètres après un parcours de 100 m.
Calcule l'angle de la route avec l'horizontale pour chacun des panneaux donnés ci-dessus.

37 Un chemin rectiligne fait un angle de 15° avec l'horizontale. De quelle altitude est-on monté après avoir parcouru 2,5 km sur ce chemin ?

38 Une route rectiligne a une pente de 17%.
1) Calcule la mesure de l'angle de cette route avec l'horizontale.
2) De quelle altitude montera un automobiliste après avoir parcouru 200 m sur cette route ?

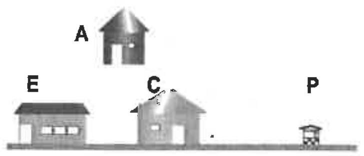
39 Le filet de M. Ali Gator s'est accroché au fond du marigot. Pour le libérer, Ali le tire verticalement : le filet émerge de 50 cm, mais ne se décroche pas. Ali se déplace de 2 m et tire obliquement : toujours sans se décrocher, le filet affleure à la surface de l'eau.

EXERCICES

Avant de plonger pour décrocher son filet, Ali voudrait savoir la profondeur du marigot. Peux-tu l'aider ?

RECHERCHE

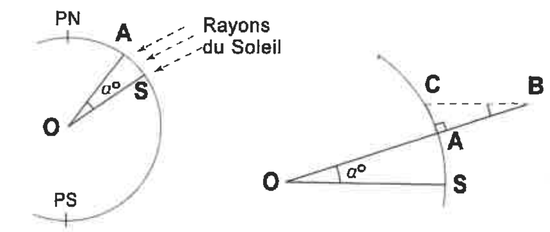
40 Abdou dit : « Il y a une piste rectiligne qui traverse mon village. Le long de cette piste, on rencontre successivement : l'école, 100 mètres plus loin la case du chef, et 300 mètres plus loin le puits du village. La case de mes parents est située à l'arrière de la case du chef ; sa distance au puits est égale au double de sa distance à la case du chef. »



1) Fais une figure à l'échelle 1/50 sur laquelle tu assimilera une maison à un point.
2) Par une étude expérimentale, vérifie que la distance AE est constante.
Donne une valeur approchée de AE.
3) Calcule la distance AE.
(Tu pourras utiliser une position particulière du point A.)

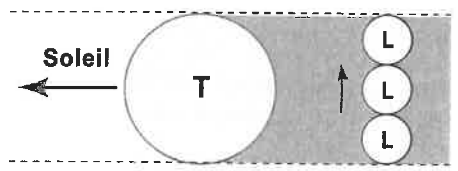
41 Mensah est au bord de l'Océan et regarde la ligne d'horizon.
1) À quelle distance des yeux de Mensah se trouve cette ligne d'horizon sachant que les yeux de Mensah sont à 1,70 m du sol ?
2) À quelle distance des yeux de Mensah se trouve cette ligne d'horizon s'il se place au sommet d'une colline d'altitude 100 m ?
Le rayon de la Terre est d'environ 6 400 km.

42 Le périmètre de la Terre par Ératosthène
Ératosthène (III[e] siècle avant J.C), bibliothécaire à la bibliothèque d'Alexandrie, était aussi mathématicien. Il remarqua qu'à midi, le jour du solstice d'été (21 juin), lorsque le Soleil culminait au zénith dans la ville de Syène (aujourd'hui Assouan), les puits de la ville étaient éclairés jusqu'au fond et les obélisques n'avaient pas d'ombre; alors qu'à Alexandrie, située sur le même méridien mais plus au nord, et au même moment, les obélisques avaient une ombre.
Pour un obélisque de 12 m, il mesura 1,5 m.

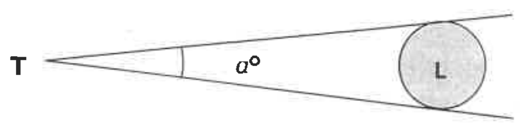


Il calcula alors la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. Puis en utilisant des relevés topographiques trouvés dans la bibliothèque, il estima la distance Alexandrie – Syène à 785 km et calcula le périmètre de la Terre.
1) Compare la mesure des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOS}$.
2) Trouve le périmètre de la Terre qu'Eratosthène calcula à son époque.

43 Distance Terre-Lune par Aristarque
Aristarque de Samos (III[e] siècle avant J.C) pensait que le Soleil, très éloigné de la Terre, éclairait un hémisphère terrestre de sorte que l'ombre portée par la Terre avait la forme d'un cylindre. De plus, lorsque la Lune pénétrait dans l'ombre de la Terre il y avait éclipse de Lune, on ne la voyait donc plus.
En outre, après avoir fait certaines observations, Aristarque avait constaté que la Lune paraissait « avancer » d'une longueur correspondant à son diamètre en une heure (une éclipse de Lune dure environ trois heures).



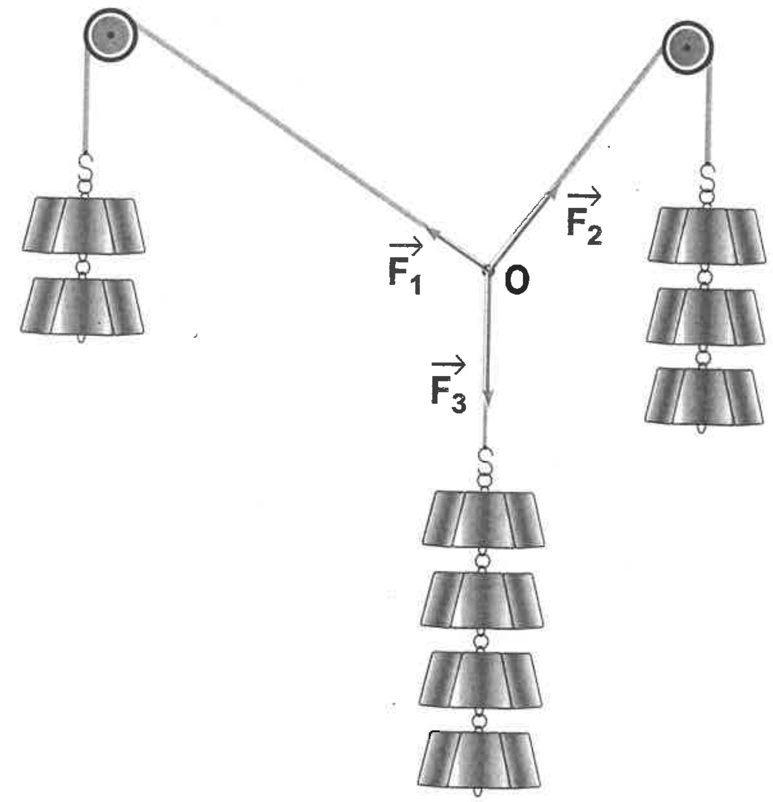
1) Calcule le rapport $\dfrac{\text{rayon de la Lune}}{\text{rayon de la Terre}}$.



2) a) Calcule la mesure $a°$ de l'angle sous lequel la Lune est vue de la Terre, sachant que la durée d'une lunaison est d'environ 30 jours.
b) Calcule la distance de la Terre à la Lune en fonction du rayon r de la Terre.
Calcule cette distance pour r = 6 400 (en km).

3

Vecteurs



Explique pourquoi 400 g permettent d'équilibrer 200 g + 300 g.

SOMMAIRE

1 Somme de vecteurs

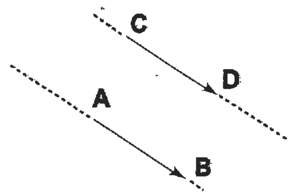
1.1 LES VECTEURS

Tableau récapitulatif

Vecteurs égaux

A, B, C et D sont des points.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont :
- la meme direction,
- le meme sens,
- la meme longueur.

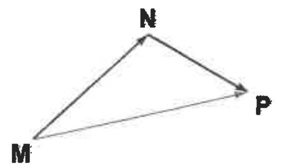


Égalité de Chasles

M, N et P sont des points.

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MP}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$



Vecteurs opposés

A et B sont des points.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

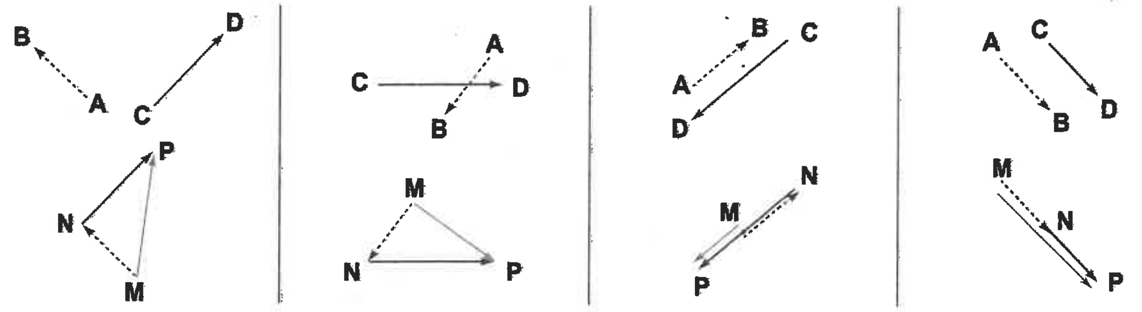
On note : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Calcul d'une somme de vecteurs

Pour effectuer une somme de plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper certains vecteurs.

Représenter la somme de deux vecteurs

Pour représenter la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans chacun des cas de figure suivants,
- on a choisi un point M
- on a construit les points N et P tels que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CD}$
- on a obtenu le vecteur $\overrightarrow{MP}$ tel que : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

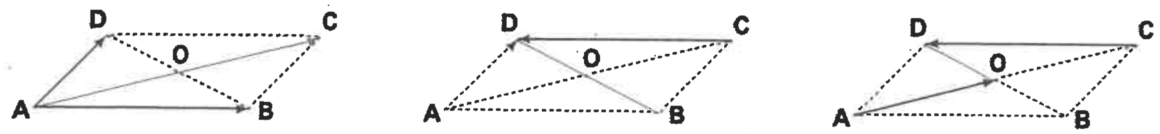


Remarque

La somme de deux vecteurs de même direction est un vecteur de même direction ou le vecteur nul.

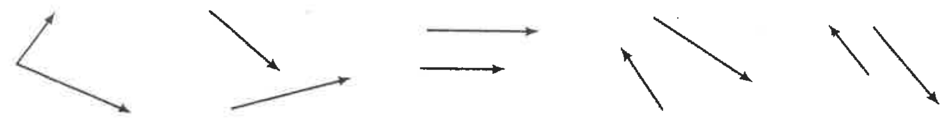
Reconnaître la somme de deux vecteurs

Dans chacun des cas de figures suivants, ABCD est un parallélogramme de centre O. Le vecteur représenté en vert est la somme des vecteurs représentés en noir. Justifie.



EXERCICES

1.a Représente la somme des deux vecteurs dans chacun des cas suivants.

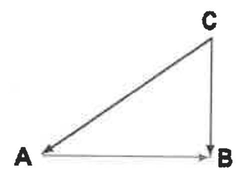


1.b A, B, C et D sont des points du plan.
Construis les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont égaux.

1.c F, G, H, I sont quatre points alignés.
Construis les points O et P tels que : $\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HI}$.
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{FO}$ et $\overrightarrow{HP}$ sont égaux.

1.2 TRANSFORMATIONS D'ÉCRITURE

Différence de deux vecteurs



A, B et C sont des points du plan.

On pose : $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + (-\overrightarrow{CA})$

Le vecteur $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ est appelé **différence** des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

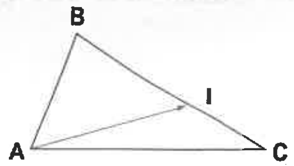
$\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Récuire des sommes de vecteurs

A, B, C, D, E, F et P sont des points du plan.
Simplifions l'écriture de la somme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$.

	Justifications
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$	$-\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CP}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE}$	*Règle de calcul*
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{EE}$	*Égalité de Chasles*
$= \overrightarrow{AP}$	$\overrightarrow{EE} = \vec{0}$

Écrire un vecteur comme somme ou différence de vecteurs



ABC est un triangle. I est un point de [BC].
Écrivons de deux manières différentes le vecteur $\overrightarrow{AI}$ comme somme, puis comme différence de deux vecteurs.

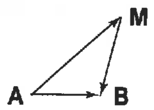
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$

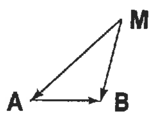
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CA}$

REMARQUE

Pour effectuer certains calculs portant sur des vecteurs, il est souvent judicieux de remplacer un vecteur par une somme ou par une différence de deux vecteurs.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$





$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$

EXERCICES

1.d ABCD est un parallélogramme. M est un point du plan.
Démontre les égalités suivantes : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM}$; $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}$.

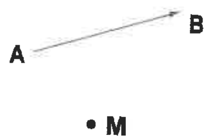
1.e ABCD est un parallélogramme, E et F sont deux points du plan.
Réduis la somme : $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CA}$.

1.f A, B, C, D et E sont des points du plan. Réduis la somme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$.

2 Produit d'un vecteur par un nombre

2.1 DÉFINITION

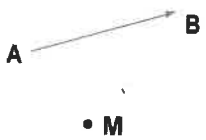
Activité



On donne le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point M du plan.
- Construis le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ est noté $2\overrightarrow{AB}$.
Compare les vecteurs $2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ (direction, sens et longueur).

On dit que le **vecteur** $2\overrightarrow{AB}$ est le **produit du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **par le nombre réel 2.**



- Construis le point P tel que :

MABP soit un trapèze, (AB) // (MP) et MP = 1,5 AB.
On note : $\overrightarrow{MP} = 1{,}5\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{PM} = -1{,}5\,\overrightarrow{AB}$.
Compare : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ (direction, sens et longueur).

On dit que le **vecteur** $\overrightarrow{MP}$ est le **produit du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **par le nombre réel 1,5** ;
On dit que le **vecteur** $\overrightarrow{PM}$ est le **produit du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **par le nombre réel – 1,5.**

DÉFINITION

On appelle produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel non nul k, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que :
- **(MN) et (AB) ont la même direction ;**
- **$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens lorsque k est positif ; ont des sens contraires lorsque k est négatif ;**
- **MN = $|k|$ AB.**

Le produit du vecteur nul par un nombre réel est le vecteur nul.
Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 0 est le vecteur nul.

Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k est noté : $k\,\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	
$k\,\overrightarrow{AB}$	$k\,\overrightarrow{AB}$	$0\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$	$k\,\vec{0} = \vec{0}$
$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$	$(\overrightarrow{AB} = \vec{0})$

EXERCICES

2.a A et B sont deux points du plan. Construis le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
Construis le point E tel que : $\overrightarrow{CE} = (-\frac{2}{5})\,\overrightarrow{AB}$.

2.b Les points A, B, C et D sont non alignés et tels que : $\overrightarrow{CD} = -3\,\overrightarrow{AB}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

2.2 PROPRIÉTÉS

Activité 1

A et B sont deux points du plan. On veut comparer $\frac{1}{3}(6\,\overrightarrow{AB})$ et $(\frac{1}{3} \times 6)\,\overrightarrow{AB}$.
Pour cela, place deux points du plan : M, P.
Construis le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(6\,\overrightarrow{AB})$.
Construis le point Q tel que : $\overrightarrow{PQ} = 2\,\overrightarrow{AB}$.
Justifie que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Activité 2

A et B sont deux points du plan. On veut comparer $(-5)\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AB}$ et $(-5+2)\,\overrightarrow{AB}$.
Pour cela, place deux points du plan : R, T.
Construis le point S tel que : $\overrightarrow{RS} = (-5)\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AB}$.
Construis le point U tel que : $\overrightarrow{TU} = (-3)\,\overrightarrow{AB}$.
Justifie que : $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$.

Activité 3

A, B, C et D sont quatre points du plan. On veut comparer $3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ et $3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Pour cela, place deux points du plan : M, P.

Construis le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$.

Construis le point Q tel que : $\overrightarrow{PQ} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Vérifie, à l'aide de tes instruments, que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

On admet les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS

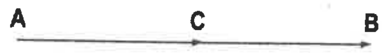
A, B, C et D sont des points du plan. k et h sont des nombres réels. On a :

$k(h\overrightarrow{AB}) = (kh)\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

$k\overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AB} = (k + h)\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

Exemples

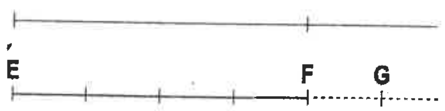
• *[AB] est un segment. Construisons le point C tel que :* $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{AB})$.



$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{AB}) = (\frac{1}{4} \times 2)\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Le point C est le milieu de [AB].

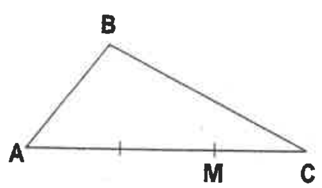
• *[EF] est un segment. Construisons le point G tel que :* $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EF}$.



$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4})\overrightarrow{EF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{EF}$.

G est le point de (EF) tel que : $\overrightarrow{EG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{EF}$.

• *ABC est un triangle. Construisons le point M tel que :* $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

M est le point de (AC) tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE

2.c A, B, C, D sont des points du plan. Simplifie les écritures suivantes :

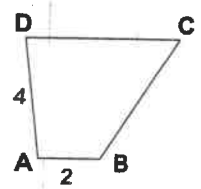
$3\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$; $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$;

$(-3)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$; $(-\frac{3}{2})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + 2(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$.

3 Vecteurs et configurations

3.1 VECTEURS DE MÊME DIRECTION

Activité



ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC].

• Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction.

• Démontre que : $\overrightarrow{CD} = (-2,5)\overrightarrow{AB}$.

On dit que le **vecteur $\overrightarrow{CD}$ est exprimé en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$**.

• Exprime le vecteur $\overrightarrow{DC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

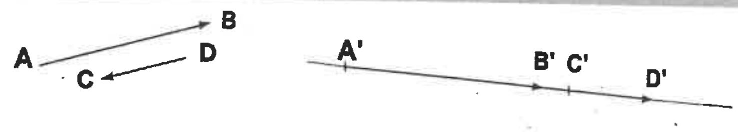
• Cite deux vecteurs de même direction, deux vecteurs de directions différentes.

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

A, B, C et D sont quatre points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction.	***équivaut à***	**on peut trouver un nombre réel k non nul tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$**



$\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$

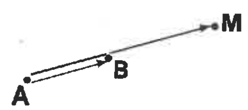
$\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{C'D'}$

EXERCICE

3.a ABC est un triangle, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et de [AC].
Justifie que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même direction, et que $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CJ}$ n'ont pas la même direction.

3.2 VECTEURS COLINÉAIRES

Alignement de trois points



A et B sont deux points du plan.

• k est un nombre réel et M le point du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Examine le cas où k est le nombre 0.
Démontre que M est un point de la droite (AB).

• N est un point de la droite (AB).
Examine le cas où N et A sont confondus.
Démontre que l'on peut trouver un nombre réel h tel que : $\overrightarrow{AN} = h\overrightarrow{AB}$.

DÉFINITION

On dit que des vecteurs sont *colinéaires* lorsqu'ils ont meme direction, ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

PROPRIÉTÉ

A et B sont deux points du plan.

M ∈ (AB) ***équivaut à*** **$\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires**

$\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$; $\vec{0} = 0\,\vec{AB}$

EXERCICES

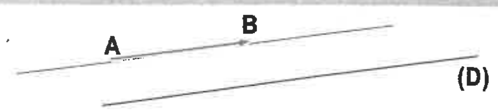
3.b M est un point de la droite (AB). L'abscisse de M dans le repère (A ; B) est m. Justifie que $\vec{AM} = m\,\vec{AB}$.

3.c A, B, C et D sont quatre points non alignés, tels que $\vec{AB} = 2\,\vec{CD}$. Les droites (AC) et (BD) se coupent au point E. Justifie que C est le milieu de [AE].

3.3 VECTEURS DIRECTEURS D'UNE DROITE VECTEURS ORTHOGONAUX

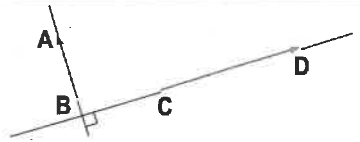
DÉFINITIONS

• On dit que le vecteur non nul $\vec{AB}$ est un *vecteur directeur* de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.



(AB) // (D)

• On dit que deux *vecteurs non nuls sont orthogonaux* lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.



(AB) ⊥ (CD)

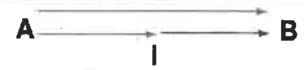
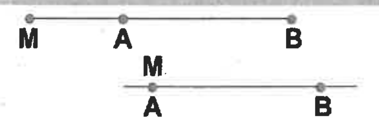
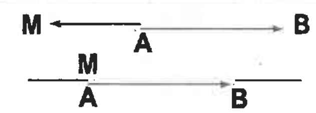
On note : $\vec{AB} \perp \vec{CD}$

EXERCICES

3.d M, P et Q sont trois points non alignés du plan.
Construis la droite (L), de vecteur directeur $\vec{PQ}$ et passant par le point M.

3.e $\vec{MP}$ est un vecteur directeur de deux droites (D) et (D'), et M est un point de (D).
Explique pourquoi P n'est pas un point de (D').

3.4 LANGAGE GÉOMÉTRIQUE LANGAGE VECTORIEL

	Langage géométrique		Langage vectoriel
Milieu d'un segment	**I est le milieu de [AB]** 	*équivaut à*	$\vec{AB} = 2\,\vec{AI}$ 
Points alignés	**A, B et M sont alignés** 	*équivaut à*	**On peut trouver un nombre k tel que : $\vec{AM} = k\,\vec{AB}$**  $k \neq 0$; $k = 0$
Droites parallèles	**(AB) // (CD)** 	*équivaut à*	**On peut trouver un nombre k non nul tel que : $\vec{CD} = k\,\vec{AB}$** 

Remarque

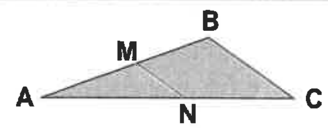
Lorsque (AB) et (CD) sont deux noms d'une même droite, nous dirons que (AB) et (CD) sont confondues. Nous convenons de dire que (AB) et (CD) sont des droites parallèles.

La propriété de Thalès et sa réciproque peuvent s'exprimer à l'aide de vecteurs.

FORMULATION VECTORIELLE DES PROPRIÉTÉS DE THALÈS

ABC est un triangle. k est un nombre non nul, M un point de (AB),N un point de (AC).

(MN) // (BC) ***équivaut à*** **$\vec{AM} = k\,\vec{AB}$ et $\vec{AN} = k\,\vec{AC}$**



EXERCICES

3.f IEF est un triangle. G est un point de [IE] et H un point de [IF] tels que : $\vec{EF} = 4\,\vec{GH}$.
Démontre que : $\vec{IE} = 4\,\vec{IG}$.

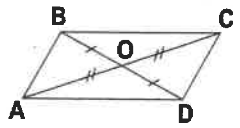
3.g B et C sont deux points du plan. Place M et N tels que : $2\,\vec{CM} = \vec{CB}$ et $\vec{CN} = \frac{1}{2}\,\vec{MB}$.
Démontre que : $\vec{CB} = 4\,\vec{CN}$.

EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

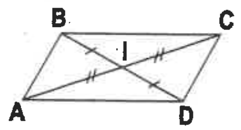
1 SOMME DE VECTEURS

1 ABCD est un parallélogramme de centre O.
Nomme un vecteur de la figure égal à :



1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$
4) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$
5) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ *7)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$
6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ *8)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

2 ABCD est un parallélogramme de centre I.
Nomme un vecteur de la figure égal à :



1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IC}$
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$
3) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC}$
4) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BC}$
5) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DI}$ *6)* $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{IC}$

3 A, B, C, D, E, F et G sont des points du plan.
Simplifie l'écriture de chacune des sommes ci-dessous :
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EG}$
3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

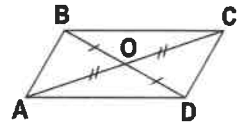
4 A, B, P et Q sont quatre points du plan.
Complète chacune des égalités suivantes :
1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{\ldots B}$ *3)* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{\ldots B}$
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots B}$ *4)* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{PB}$

5 A, B, C et D sont quatre points du plan.
Construis P tel que :
1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ *2)* $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$

2 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE

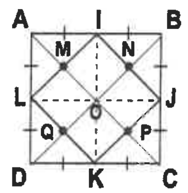
6 A, B et C sont trois points non alignés.
Dans chacun des cas suivants, construis M tel que :
1) $\overrightarrow{CM} = 2\,\overrightarrow{AB}$ *4)* $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{-5}{3}\right)\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{CM} = (-3)\,\overrightarrow{AB}$ *5)* $\overrightarrow{CM} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ *6)* $\overrightarrow{CM} = \sqrt{3}\ \overrightarrow{AB}$

7 ABCD est un parallélogramme de centre O.
Complète les égalités suivantes par des nombres :



1) $\overrightarrow{AC} = \ldots\ \overrightarrow{OC}$
2) $\overrightarrow{OB} = \ldots\ \overrightarrow{DB}$
3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \ldots\ \overrightarrow{DC}$
4) $\overrightarrow{BO} = \ldots\ \overrightarrow{DO}$
5) $\overrightarrow{AO} = \ldots\ \overrightarrow{CA}$

8 ABCD est un carré de centre O.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Complète les égalités suivantes par des nombres :



1) $\overrightarrow{AC} = \ldots\ \overrightarrow{OP}$
2) $\overrightarrow{ON} = \ldots\ \overrightarrow{BO}$
3) $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \ldots\ \overrightarrow{OQ}$
4) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \ldots\ \overrightarrow{OI}$

9 A et B sont des points du plan.
Simplifie les écritures suivantes :
1) $2\,(3\,\overrightarrow{AB})$ *6)* $\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$
2) $3\,(-\overrightarrow{AB})$ *7)* $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$
3) $-(-2\,\overrightarrow{AB})$ *8)* $\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
4) $(-2)\,(\frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB})$ *9)* $-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
5) $(-3)\,(-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB})$ *10)* $-\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

10 A, B et C sont trois points non alignés.
Dans chacun des cas suivants, construis le point M tel que :
1) $\overrightarrow{CM} = 2(-3)\,\overrightarrow{AB}$ *3)* $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{CM} = 2\,\left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}$ *4)* $\overrightarrow{CM} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC}$

11 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CD} + 3\,\overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{IJ} = -4\,\overrightarrow{CD} - 3\,\overrightarrow{EF}$
Exprime les vecteurs ci-dessous en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{IJ}$ *4)* $2\,\overrightarrow{AB} + 6\,\overrightarrow{GH} - \frac{1}{4}\,\overrightarrow{IJ}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{IJ}$ *5)* $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{GH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$
3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{IJ}$

12 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{CD}$ et $3\,\overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{EF}$.
Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

13 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$3\,\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\left(\frac{-2}{3}\right)\overrightarrow{CD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{EF}$.
1) Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.
2) Exprime $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

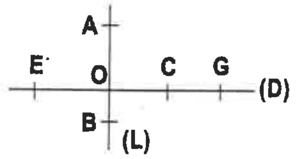
3 VECTEURS ET CONFIGURATIONS

14 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, P, Q sont tels que :
1) $\overrightarrow{AB} = (-2)\,\overrightarrow{CD}$ *4)* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$
2) $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{CD}$ *5)* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{-2}{3}\right)\overrightarrow{CD}$
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.

15 En utilisant des points de la figure ci-dessous, nomme trois vecteurs directeurs de la droite (D).

16 A, B, C sont trois points non alignés du plan.
Construis la droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

17 En utilisant des points de la figure ci-contre, nomme cinq vecteurs orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{OA}$.



18 MNP est un triangle. Les points I et J sont les milieux respectifs de ses côtés [MN] et [NP].
1) Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{MP}$.
2) Exprime $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

19 A, B et C sont trois points non alignés.
Construis les points E et F tels que :
$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BC}$.
Exprime $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

20 I, J, A et C sont quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$.
B est le point d'intersection de (AI) et (CJ).
Construis une figure.
Complète chacune des égalités suivantes :
1) $\overrightarrow{BI} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$ *2)* $\overrightarrow{BC} = \ldots\ \overrightarrow{JC}$

21 ABC est un triangle.
Le point G est le centre de gravité de ce triangle.
Les points P, M et N sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
Exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{NG}$ en fonction de $\overrightarrow{CN}$.

22 ABC est un triangle.
1) Place les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CA}$.
2) Démontre que C est le milieu de [MN].

23 FAE est un triangle. Les points F' et E' sont tels que : $\overrightarrow{FF'} = (-2)\,\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FE'} = (-2)\,\overrightarrow{FE}$.
1) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FE}$, puis exprime le vecteur $\overrightarrow{F'E'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{F'F}$ et $\overrightarrow{FE'}$.
2) Exprime $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{F'E'}$.

24 E, F et G sont trois points non alignés.
1) Construis les points F' et G' tels que :
$\overrightarrow{FF'} = 2\,\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{GG'} = 2\,\overrightarrow{EG}$.
2) Démontre que $\overrightarrow{F'G'} = 3\,\overrightarrow{FG}$.

APPROFONDISSEMENT

25 E et F sont deux points du plan.
1) Construis le point P tel que $2\,\overrightarrow{EP} = 3\,\overrightarrow{EF}$.
2) Exprime $\overrightarrow{PF}$ en fonction de $\overrightarrow{EP}$.
Exprime $\overrightarrow{FE}$ en fonction de $\overrightarrow{PF}$.

26 EFG est un triangle.
1) Construis le point P tel que
$\overrightarrow{EP} = 3\,\overrightarrow{EF} + (-2)\,\overrightarrow{EG}$
2) Exprime le vecteur $\overrightarrow{FP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

EXERCICES

3) Démontre que les points F, P et G sont alignés.

27 ABC est un triangle équilatéral et I est un point extérieur à ce triangle.
1) Construis les points D, E et F tels que
$\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
2) Démontre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
3) Démontre que le triangle DEF est équilatéral.

28 E, F et G sont trois points non alignés.
1) Construis le point H tel que $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})$
Que représente le point H pour le segment [FG] ?
2) Construis le point I tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})$
Que représente le point I pour le triangle EFG ?

29 ABCD est un rectangle de centre O.
Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [DC]. M est le point d'intersection des droites (AJ) et (DB) et N le point d'intersection des droites (IC) et (DB).
a) Démontre que : $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$
b) Complète les égalités suivantes :
1) $\overrightarrow{MN}$ = ... $\overrightarrow{DB}$ *2)* $\overrightarrow{ON}$ = ... $\overrightarrow{DB}$
3) $\overrightarrow{BD}$ = ... $\overrightarrow{DN}$ *4)* $\overrightarrow{MO}$ = ... $\overrightarrow{BD}$

30 Le point I est le milieu d'un segment [AB].
M est un point.
Démontre que : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

(On pourra utiliser le résultat de l'exercice 36 pour résoudre les exercices 37 à 42).

31 M et N sont deux points de la droite (AB) tels que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{AB}$.
Le point I est le milieu du segment [MN].
Exprime $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

32 ABCD est un parallélogramme de centre O.
M est un point du plan.
Démontre que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

33 ABC est un triangle. Le point O est le centre de son cercle circonscrit.
1) Construis les points E et F tels que :
$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
2) Démontre que : (OE) ⊥ (BC) et (OF) ⊥ (AC).
3) Construis le point H tel que :
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
4) Démontre que : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OF}$.
5) H est un point remarquable du triangle ABC. Lequel ?

34 ABC est un triangle.
1) Le point A' est le milieu du côté [BC] et M est un point de la droite (AI).
Démontre que :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A}$.
2) Le point G est le centre de gravité de ABC.
Démontre que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

35 A, B, C et D sont quatre points du plan.
Démontre que :
1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

36 ACDB est un parallélogramme. Par le point B, trace la droite parallèle à la droite (AD). Cette droite coupe respectivement les droites (CD) et (CA) aux points M et N.
Démontre que : $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.

37 ABC est un triangle.
Construis les points D et F tels que
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
Justifie que le point B est le milieu de [DF].

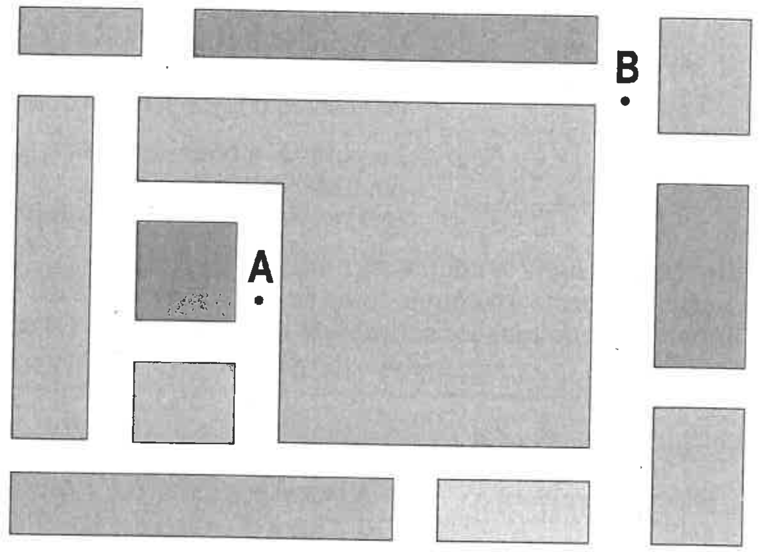
38 ABCD est un parallélogramme. Le point E appartenant au segment [AD] est tel que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{11}\overrightarrow{AD}$.
F est le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite parallèle à (AB) passant par E.
G est le point d'intersection des droites (AC) et (EF).
Démontre que :
1) $\overrightarrow{EG} = \frac{4}{11}\overrightarrow{DC}$ *2)* $\overrightarrow{GF} = \frac{7}{11}\overrightarrow{AB}$
3) $7\overrightarrow{EG} + 4\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{0}$.

39 On donne un segment [EF].
Construis le point X du segment [EF] tel que :
$3\overrightarrow{EX} + 5\overrightarrow{FX} = \overrightarrow{0}$.

4

Coordonnées d'un vecteur

Plan d'un quartier d'une ville



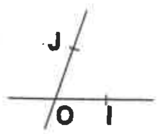
Échelle : 1 / 1 000

On ne peut pas relier les points A et B par un segment.
Comment trouver la distance de A et B ?

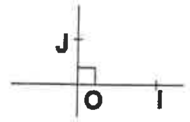
SOMMAIRE

1 Coordonnées d'un vecteur

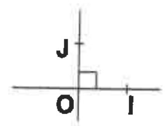
Dans ce chapitre, le plan sera muni d'un repère.



Repère quelconque



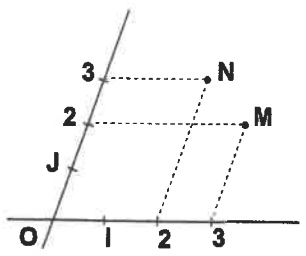
Repère orthogonal
(OI) ⊥ (OJ)



Repère orthonormé
(OI) ⊥ (OJ) et OI = OJ

1.1 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Couple de nombres réels



Le plan est muni du repère (O, I, J).

Le point M a pour abscisse 3 et pour ordonnée 2.
On note : M (3;2).
(3;2) est le couple de coordonnées du point M.

Le point N a pour abscisse 2 et pour ordonnée 3.
On note : N (2;3).
(2;3) est le couple de coordonnées du point N.

L'écriture $(x;y)$ désigne le couple de nombres réels x et y.
x est **le premier terme** du couple, y est **le deuxième terme** du couple.
L'ensemble formé de tous les couples de nombres réels est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On lit $\mathbb{R}$ croix $\mathbb{R}$.

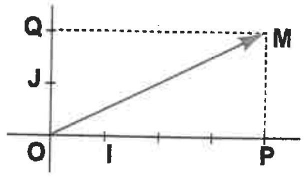
ÉGALITÉ DE COUPLES

Les couples $(x;y)$ et $(x';y')$ sont égaux *équivaut à* $x = x'$ et $y = y'$.

$(a;5) = (8;b)$ *équivaut à* $a = 8$ et $5 = b$

Les couples (2;3) et (3;2) ne sont pas égaux.

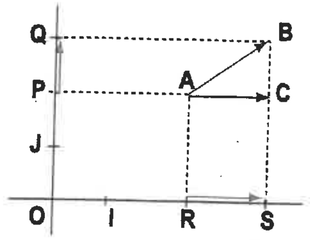
Activité 1



Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne le point M (4;2).
On veut démontrer que : $\vec{OM} = 4\,\vec{OI} + 2\,\vec{OJ}$.
Pour cela, on écrit : $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$
P étant le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ),
Q étant le projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI).

On exprime $\vec{OP}$ en fonction de $\vec{OI}$, on exprime $\vec{OQ}$ en fonction de $\vec{OJ}$.
On peut alors exprimer **le vecteur** $\vec{OM}$ **en fonction des vecteurs** $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$.
Le couple de coordonnées (4;2) du point M dans le repère (O, I, J) est appelé **couple des coordonnées** du vecteur $\vec{OM}$.

Activité 2



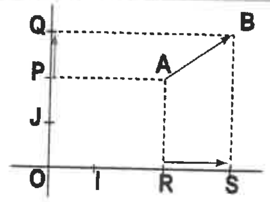
Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont des points du plan.
On veut exprimer $\vec{AB}$ en fonction de $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$.
Pour cela, R et S étant les projetés respectifs de A et B sur (OI) parallèlement à (OJ), P et Q étant les projetés respectifs de A et B sur (OJ) parallèlement à (OI), justifie que :

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{RS} + \vec{PQ}.$$

On peut trouver un nombre x et un seul tel que : $\vec{RS} = x\,\vec{OI}$
On peut trouver un nombre y et un seul tel que : $\vec{PQ} = y\,\vec{OJ}$.

DÉFINITION

Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont des points du plan.
On appelle couple de coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ le couple de nombres réels $(x;y)$ tel que : $\vec{AB} = x\,\vec{OI} + y\,\vec{OJ}$.



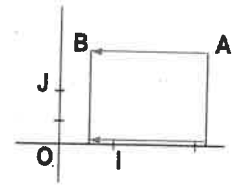
On note : $\vec{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{AB}\,(x;y)$

Remarques
Des vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont des couples de coordonnées égaux.
Le vecteur nul a pour couple de coordonnées (0;0).

Vecteurs de même direction qu'un axe du repère

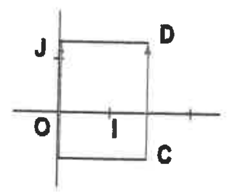
Le plan est muni du repère (O, I, J).

x est un nombre réel différent de 0.
$\vec{AB}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ a la même direction que $\vec{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



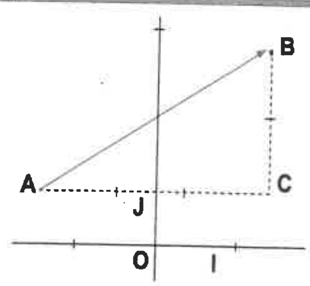
$\vec{AB} = x\,\vec{OI}$.

y est un nombre réel différent de 0.
$\vec{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ a la même direction que $\vec{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



$\vec{CD} = y\,\vec{OJ}$.

Représentation d'un vecteur



Le plan est muni du repère (O, I ,J). On donne un point A.
On veut construire le point B tel qu'on ait $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On sait que : $\vec{AB} = 3\vec{OI} + 2\vec{OJ}$.
On marque le point C tel que : $\vec{AC} = 3\vec{OI}$.
On marque le point B tel que : $\vec{CB} = 2\vec{OJ}$.

EXERCICES

1.a Calcule x et y pour que les couples suivants soient égaux :
$(x + 1; -3)$ et $(-2; y - 5)$; $(-5; 3y)$ et $(2x; 4)$; $(3x - 4; 4y + 1)$ et $(x + 5; 3 - y)$.

1.b Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne A (2;–2) et B (0;4).
Quel est le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$?
Quel est le couple de coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$?

1.c Dans le plan muni du repère (O, I, J), construis le point M tel qu'on ait $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
Quel est le couple de coordonnées du point M ?

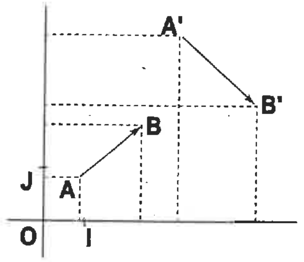
1.d Le plan est muni d'un repère. On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\x+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-y\\3\end{pmatrix}$.
Calcule x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux.

1.e Dans le plan muni d'un repère, on donne le point A (–2;–2).
Construis le point B tel qu'on ait $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

1.2 COORDONNÉES D'UNE SOMME DE VECTEURS

Présentation

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\,(x;y)$ et $\overrightarrow{A'B'}\,(x';y')$.



On veut déterminer le couple de coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$;
$\overrightarrow{A'B'} = x'\,\overrightarrow{OI} + y'\,\overrightarrow{OJ}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = (x\,\overrightarrow{OI} + x'\,\overrightarrow{OI}) + (y\,\overrightarrow{OJ} + y'\,\overrightarrow{OJ})$
$= (x + x')\,\overrightarrow{OI} + (y + y')\,\overrightarrow{OJ}$.

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni d'un repere. A, B, A' et B' sont des points du plan.
Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'})\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Exemple

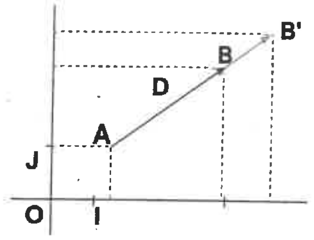
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$.

EXERCICE

1.f Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne : $\overrightarrow{AB}\,(2;-5)$; $\overrightarrow{CD}\,(3;-1)$; $\overrightarrow{EF}\,(\frac{-2}{3} ; \frac{5}{2})$.
Quel est le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$?

1.3 COORDONNÉES DU PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE

Aotivité



Le plan est muni du repère (O, I ,J) .
On donne le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et un nombre réel k.
On veut déterminer le couple de coordonnées de $k\,\overrightarrow{AB}$.

Pour cela, on construit le point B' tel que : $\overrightarrow{AB'} = k\,\overrightarrow{AB}$,
on exprime $k\,\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni d'un repère. A et B sont des points du plan, k est un nombre réel.
Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $k\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

EXERCICE

1.g Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère les vecteurs $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$.

a) Quel est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ tel que : $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ON}$?

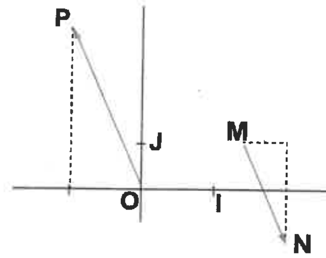
b) Quel est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OK}$ tel que : $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OM}$?

c) Démontre que : $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$.

2 Vecteurs colinéaires Vecteurs orthogonaux

2.1 VECTEURS COLINÉAIRES

Aotivité



Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les vecteurs $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0{,}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.
A l'aide de tes instruments vérifie que : (OP) // (MN).
Tu constates que : $0{,}5 \times 4 - (-2) \times (-1) = 0$

$$\begin{pmatrix}0{,}5\\-2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

Plus généralement, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ayant la même direction, on veut démontrer que : $xy' - x'y = 0$.
Tu sais qu'il existe un nombre k tel que : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Traduis cette égalité à l'aide des coordonnées de $\vec{AB}$ et celles de $\vec{A'B'}$. Calcule $xy' - x'y$.
Si l'un des vecteurs $\vec{AB}$ ou $\vec{A'B'}$ est nul, tu obtiens encore : $xy' - x'y = 0$.

On admet la réciproque de cette propriété :

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni d'un repère.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $\vec{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ **sont colinéaires** ***équivaut à*** $xy' - x'y = 0$

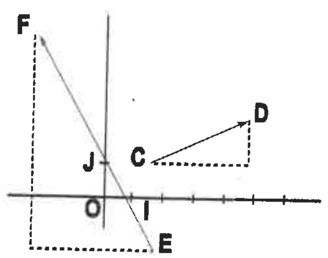
EXERCICES

2.a Le plan est muni d'un repère. Parmi les vecteurs suivants, trouve ceux qui sont colinéaires à $\vec{AB}$ (–3;2) : $\vec{CD}$ $(3\sqrt{2};\sqrt{2})$; $\vec{EF}$ $(1;\frac{1}{3})$; $\vec{GH}$ $(1;-\frac{2}{3})$; $\vec{MN}$ $(\sqrt{3};-\frac{2}{\sqrt{3}})$.

2.b Le plan est muni d'un repère. Démontre que les vecteurs $\vec{AB}$ $(2;\frac{2}{3})$ et $\vec{CD}$ (3;1) ont la même direction.

2.2 VECTEURS NON NULS ORTHOGONAUX

Activité



Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

On donne les vecteurs $\vec{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{EF}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

A l'aide de tes instruments, vérifie que : (CD) ⊥ (EF).
Tu constates que : $4 \times (-3) + 2 \times 6 = 0$.

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ .... $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Plus généralement, $\vec{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ étant non nuls orthogonaux, on veut démontrer que : $xx' + yy' = 0$.
Pour cela,
– construis les points M et N tels que : $\vec{OM} = \vec{AB}$ et $\vec{ON} = \vec{A'B'}$;
– justifie que le triangle OMN est rectangle en O ;
– applique la propriété de Pythagore et conclus.

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni d'un repere orthonorme. $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $\vec{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ **sont orthogonaux** ***équivaut à*** $xx' + y'y = 0$.

EXERCICES

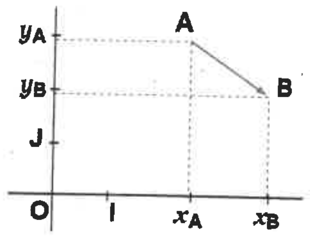
2.c Le plan est muni d'un repère orthonormé. Les vecteurs $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

2.d Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (–1;3) et B (6;2). Démontre que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

3 Calculs dans un repère

3.1 CALCUL DES COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Activité

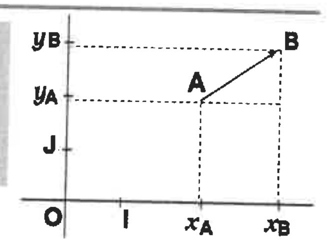


Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne A $(x_A;y_A)$ et B $(x_B;y_B)$.
On veut démontrer que :
$\vec{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{OI} + (y_B - y_A)\,\vec{OJ}$.
Pour cela, exprime $\vec{AB}$ en fonction de $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni d'un repère. A et B sont deux point du plan.

Si A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ **et** B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ **alors** $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

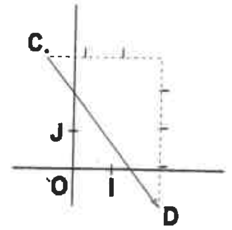


Exemple

Le plan est muni d'un repère. On donne les points A (152;330) et B (155;326).
On veut représenter le vecteur $\vec{AB}$.

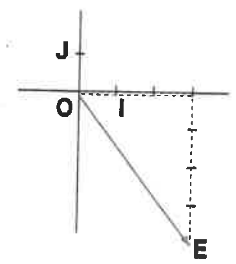
$(x;y)$ étant le couple de coordonnées de $\vec{AB}$, on a : $x = 155 - 152 = 3$; $y = 326 - 330 = -4$.
On peut représenter $\vec{AB}$ en utilisant l'une des méthodes suivantes :

– Prendre un point C.
– Construire le point D tel que $\vec{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$



$\vec{CD} = \vec{AB}$

– Construire le point E (3;– 4)



$\vec{OE} = \vec{AB}$

EXERCICES

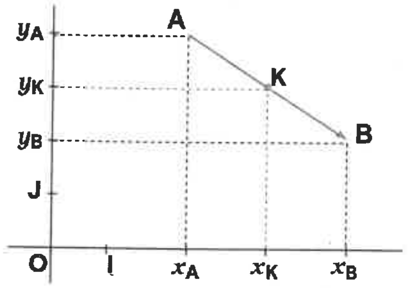
3.a Le plan est muni du repère (O, I, J). Place les points A (–2;3), B (1;2) et C (–3;–3).
Quel est le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$?

3.b Le plan est muni du repère (O, I ,J). On donne : A (–1;2); B (3;5); C (–3,5;–1,5) ; D (0,5;1,5).
Démontre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux. Quel est le couple de coordonnées de $-\overrightarrow{AB}$?

3.c Le plan est muni du repère (O, I, J). Représente le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$.

3.2 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Activité



Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points A $(x_A;y_A)$; B $(x_B;y_B)$.

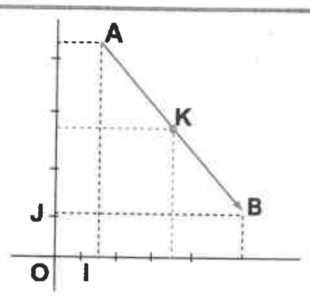
On veut trouver le couple de coordonnées du milieu K de [AB]

Pour cela, utilise l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni du repère (O, I, J).K est le milieu du segment [AB].

Si A $(x_A;y_A)$ et B $(x_B;y_B)$ alors K$\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.



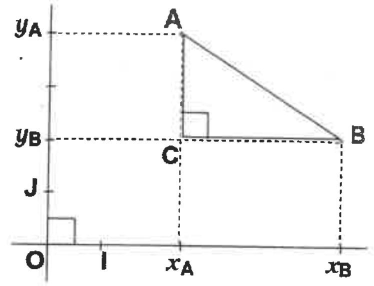
EXERCICES

3.d Le plan est muni d'un repère. On donne deux points A (2;–3) et B $\left(\frac{3}{2};-5\right)$.
Quel est le couple de coordonnées du milieu du segment [AB] ?

3.e Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points A (–2;5) et B (6;–5).
Quel est le couple de coordonnées du point C image du point A par la symétrie de centre B ?

3.3 DISTANCE DE DEUX POINTS

Activité



Le plan est muni du repère **orthonormé** (O, I, J).
On donne les points A $(x_A;y_A)$ et B $(x_B;y_B)$.
On veut calculer la distance AB.

Pour cela, C étant le point ayant la même abscisse que A et la même ordonnée que B,
– détermine AC et BC,
– Dans le triangle ABC rectangle en C, calcule AB.

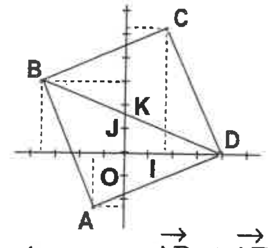
PROPRIÉTÉ

Le plan est muni d'un repère orthonormé. A et B sont des points du plan.

Si A (x_A,y_A) et B (x_B,y_B) alors AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple

Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne les points A (–2;–2), B (–4;4) et D (4;0).
K est le milieu de [BD] et C le symétrique de D par rapport à K.
Démontre que le quadrilatère ABCD est un carré.



Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leurs milieu ; ABCD est donc un parallélogramme.
Pour démontrer que ABCD est un carré, il suffit de démontrer qu'un de ses angles est droit et que deux côtés consécutifs ont la même longueur.

Démontrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4+2\\4+2\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4+2\\0+2\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$(-2) \times 6 + 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$

Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

Démontrons que AB et AD sont égaux.

$AB = \sqrt{(-2)^2 + 6^2}$
$= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$AD = \sqrt{6^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Donc AB = AD

EXERCICES

3.f Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (–1;2) et B $\left(\frac{-3}{2};\frac{-1}{2}\right)$.
Calcule les distances OA, OB et AB.

3.g Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A (–1;3); B $(3;\sqrt{3})$; C (2;–3) et D $(-2;-\sqrt{3})$.
a) Quel est le couple de coordonnées du milieu de chacun des segments [AC] et [BD] ?
b) Calcule les distances AC et BD.
c) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

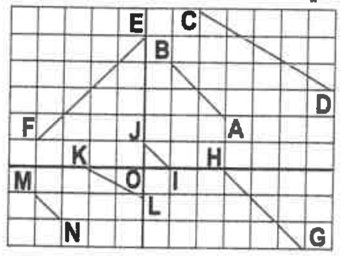
EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

1 Dans le plan muni du repère (O, I, J), les points A, B, C, D et E sont tels que :
$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OJ}$
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OE} = -3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$.
Donne le couple de coordonnées de chacun des points A, B, C, D et E.

2 Le plan est muni du repère (O, I, J).



Par simple lecture sur la figure, donne le couple de coordonnées de chacun des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{EF}$.

3 Dans le plan muni du repère (O, I, J), place les points A (5;–2), B (–2;–3), C (–3;4), D (1;5), E (5;1) et F (3;4).
Par simple lecture sur la figure, donne le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FC}$.

4 x et y sont des nombres réels.
Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : $\overrightarrow{AB}\,(3 + x\,;\,7)$ et $\overrightarrow{CD}\,(1\,;\,y - 4)$.
Calcule x et y pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux.

5 Le plan est muni du repère (O, I ,J).
On donne : $\overrightarrow{AB}\,(-\frac{3}{2};-4)$, $\overrightarrow{CD}\,(\frac{2}{3};-3)$, $\overrightarrow{EF}\,(2;3)$.
Calcule le couple de coordonnées de :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

2 VECTEURS COLINÉAIRES VECTEURS ORTHOGONAUX

6 x et y sont des nombres réels.
Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : $\overrightarrow{AB}\,(5\,;\,x - 1)$ et $\overrightarrow{CD}\,(-3\,;\,3 - x)$.
Détermine x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

7 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne : $\overrightarrow{AB}\,(3;-\frac{1}{5})$, $\overrightarrow{CD}\,(\frac{2}{5};6)$ et $\overrightarrow{EF}\,(\frac{2}{3};4)$.
Deux d'entre eux sont orthogonaux. Trouve-les.

8 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne les vecteurs : $\overrightarrow{AB}\,(2;-\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{CD}\,(x;\frac{2}{3})$.
Trouve x pour que : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

3 CALCULS DANS UN REPÈRE

9 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : A (2;3), B (3;–0,5), C (–2,5;–2), D (–3;1,5), E (0;–4) et F (3;0).
Donne le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CF}$.

10 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (–4;1), B (1;4), C (–2;–2), D (4;0).
Calcule le couple de coordonnées de chacun des vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}$.

11 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : A (–1;2) et B (2;5).
1) Calcule le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ tels que :
$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
2) Calcule ensuite le couple de coordonnées de chacun des points C et D.

12 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (4 ;–6), B (10;8), C (0;–2), D (3;5).
1) Démontre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

13 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (1;–2), B (–1;–1) et C (5;–4).
Démontre que les points A, B et C sont alignés.

14 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : M (–3;2) et N (–2;1,5).
Trouve l'ordonnée du point R d'abscisse (–5) tel que R soit aligné avec les points M et N.

EXERCICES

15 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : A (2;3) et M (4;5).
Calcule le couple de coordonnées du point B tel que : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$.
Que représenté le point M pour le segment [AB] ?

16 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (–2;1), B (2;3), C (2;0), D (–2;–2).
1) Calcule le couple de coordonnées du milieu M du segment [AC].
2) Calcule le couple de coordonnées du milieu P du segment [DB].
3) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

17 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points : A (–2;3), B (3;1) et C (0;–2).
1) Calcule AB et AC.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

18 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne : A $(-1;\frac{2}{3})$, B $(\frac{1}{3};2)$ et C $(4;-\frac{5}{3})$.
Vérifie par le calcul que : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

19 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne : A(–2;1), B (2;3), C (3;0), D (–1;–2).
1) Calcule AB , BC , DC et AD .
2) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

20 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les points :
A $(3\sqrt{3};-1-3\sqrt{3})$, B (–3;–4) et C (3;2).
Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

APPROFONDISSEMENT

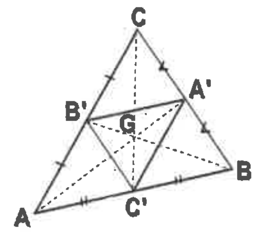
21 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (3;5), B (–2;2) et C (–4;3).
Trouve le couple de coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

22 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : A (–2;1), B (2;3) et C (0;–3).
1) Trouve le couple de coordonnées de D, image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

23 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (0;4), B (–4;2) et C (–3;–2).
1) Calcule le couple de coordonnées du point M milieu du segment [AC].
2) Calcule le couple de coordonnées du point D, image du point B par la symétrie de centre M.
3) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

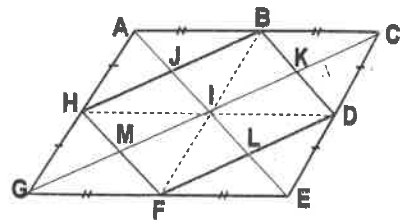
24 ABCD est un parallélogramme de centre O. Quel est le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$:
1) dans le repère (A, O, B) ?
2) dans le repère (O, D, C) ?
3) dans le repère (B, O, C) ?

25 On donne la figure codée ci-dessous.



Quel est le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{AG}$:
1) dans le repère (B, B', C) ?
2) dans le repère (G, B, C) ?
3) dans le repère (A', B', C') ?

26 On donne la figure codée ci-dessous.



ACEG est un parallélogramme de centre I.
Quel est le couple de coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L et M :
1) dans le repère (I, D, B) ?
2) dans le repère (F, E, I) ?
3) dans le repère (D, B, H) ?

27 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I ,J). On donne : A (–1;–1) et B (3;1).
Trouve les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$ tels que C ∈ (OJ) et D ∈ (OI).

28 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne : A(–2;4), B (–4;2) et C (2;0).
1) Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICES

2) (𝒞) est le cercle circonscrit à ce triangle.
Calcule le couple de coordonnées du centre E de ce cercle, puis calcule son rayon r.

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne : A (–2;–2), B (–4;4), C (2;6), D (4;0).
1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ?
2) Calcule les distances AB et AD.
3) Quelle est la nature du triangle ABD ?
4) Démontre que le quadrilatère ABCD est un carré.

30 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (2;–1), B (–2;3), E (0;3), F (–2;0).
1) Calcule les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec chacun des axes (OI) et (OJ).
2) La droite (L) passant par le point E et parallèle à (BA) coupe (OI) au point G.
Calcule le couple de coordonnées du point G.
3) La droite (L') passant par le point F et parallèle à (BA) coupe (OJ) au point H.
Calcule le couple de coordonnées du point H.

31 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les points :
A (–2;–2), B (–4;4), C (2;6) et D (4;0).
1) Démontre que [AC] et [BD] ont même milieu.
2) Démontre que : AC = BD.
3) Démontre que : $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.
4) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

32 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : A (–3;0), B(3;–4) et C (3;4).
Calcule le couple de coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

33 Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne : A (–1;2), B (7;–8) et E (7;2).
1) Démontre que le point E appartient au cercle (𝒞) de diamètre [AB].
2) Trouve le couple de coordonnées du point F symétrique du point E par rapport au centre I du cercle (𝒞).
3) Quelle est la nature du quadrilatère AEBF ?

34 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne : A (5;2), B (–1;6), M (–4;3).
A' et B' sont respectivement les images de A et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$.
1) Calcule le couple de coordonnées de chacun des points A' et B'.
2) Détermine x pour que le point N (x;0) appartienne à la droite (AB).

35 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : A (–4;2), B (–2;–6) et C (4;6).
1) Calcule le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) M est le symétrique de O par rapport à A.
Calcule le couple de coordonnées du point M.

36 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points : A (4;y) et B (x;2).
Donne quatre valeurs entières de x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ soient colinéaires.

37 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (–1;1), B (–2;–1) et C (3;3).
1) Calcule le couple de coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2) Calcule le couple de coordonnées du centre K du parallélogramme ABMC.

38 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne : M (2;3), N (6;6), K (6;1), P (2;–2).
Démontre que MNKP est un losange.

39 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne : A (1;–1), B (–1;–2) et C (–2;2).
1) Détermine le couple de coordonnées du point G pour que : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
2) Détermine le couple de coordonnées du point D pour que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
3) Démontre que $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
Justifie que les points B, G et D sont alignés.

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne les points :
A(–2;2), B (2;4), C (7,4;1,2), D (–3;–4).
Démontre que ABCD est un trapèze isocèle.

41 Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne les points :
A (3;4), B (5;–1), C (0;–3) et D (–7;0).
Démontre que ABCD est un trapèze rectangle.

42 ABCD est un carré.
Les points I et J sont respectivement les milieux des côtés [BC] et [CD].
Démontre que : $\overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{DI}$.
(Tu peux utiliser le repère orthonormé (D, C, A).)

5

Équations de droite

Photothèque Hachette

Des problesmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.
Et comme toute l'Arithmetique n'eſt composée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'a-t-on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres.

Descartes (1596 – 1650)

Illustre philosophe et mathématicien, il jette les bases d'une méthode appelée plus tard : « Géométrie analytique ».

SOMMAIRE

1 Équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Notion d'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour résoudre le problème suivant, on se propose de traduire par une équation, la situation décrite.

Énoncé

Ousmane peut dépenser exactement 100 francs pour acheter des bonbons à 10 francs l'un et des chewing-gum à 15 francs pièce. Combien de bonbons et de chewing-gums Ousmane pourra-t-il acheter ?

Choix des inconnues

Désignons par x le nombre de bonbons et par y le nombre de chewing-gums que pourra acheter Ousmane.

Mise en équation

Prix des bonbons : $10x$; prix des chewing-gums : $15y$
Prix payé par Ousmane pour son achat : $10x + 15y$
On peut alors traduire la situation décrite par **l'équation** (E) **d'inconnues** x **et** y :

$$\text{(E)} \quad 10x + 15y = 100$$

(E) est **une équation du premier degré dans** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dans cette équation (E),
– si on donne à x la valeur 2 et à y la valeur 3, c'est-à-dire si $(x;y)$ est égal à (2;3), alors l'équation (E) devient une phrase fausse.
– si on donne à x la valeur 1 et à y la valeur 6, c'est-à-dire si $(x;y)$ est égal à (1;6), alors l'équation (E) devient une phrase vraie.
On dit que (1;6) vérifie l'équation (E), ou que (1;6) est **une solution** de l'équation (E).

- Parmi les couples suivants, trouve ceux qui sont solutions de l'équation (E) :

$(1;6)$, $(\frac{4}{5};4)$, $(3;\frac{2}{3})$ $(4;4)$, $(5;4)$, $(6;4)$, $(7;2)$, $(8;\frac{4}{3})$, $(9;\frac{2}{3})$, $(10;0)$, $(13;\frac{2}{3})$, $(-1;-2)$.

- Parmi les solutions de l'équation, quels sont les couples qui sont solutions du problème ?

Transformations d'une équation

Rappelons les propriétés vues en classe de Quatrième :

PROPRIÉTÉS

Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une équation, on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

Lorsqu'on multiplie par un même nombre différent de 0 chaque membre d'une équation, on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

Exemple

Reprenons l'équation (E) $10x + 15y = 100$
Explique pourquoi chacune des équations suivantes a les mêmes solutions que (E).

(E') $2x + 3y = 20$

(E_1) $3y = 20 - 2x$
(E_2) $y = \frac{20}{3} - \frac{2}{3}x$

Dans l'équation (E_2), on a exprimé y en fonction de x.

(E'_1) $2x = 20 - 3y$
(E'_2) $x = 10 - \frac{3}{2}y$

Dans l'équation (E'_2), on a exprimé x en fonction de y.

Recherche de solutions d'une équation du 1^er^ degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour trouver des solutions de l'équation (E), on peut utiliser indifféremment l'une des équations (E'), (E_1), (E'_1), (E_2) ou (E'_2).

Dans l'équation (E_2), donnons à x une valeur arbitraire, par exemple 3.
On obtient $y = \frac{14}{3}$
$(3;\frac{14}{3})$ est une solution de l'équation (E_2);
c'est donc aussi une solution de l'équation (E).

Dans l'équation (E'_2), donnons à y une valeur arbitraire, par exemple 5.
On obtient $x = \frac{5}{2}$
$(\frac{5}{2};5)$ est une solution de l'équation (E'_2);
c'est donc aussi une solution de l'équation (E).

- Trouve cinq autres solutions de l'équation (E).

Remarque
Il y a autant de solutions que l'on veut pour l'équation (E).

EXERCICE

1.a On donne l'équation (E) $5x - 4y = 12$.
Parmi les couples suivants, trouve ceux qui sont solutions de l'équation (E) :
$(4;2)$; $(3;1)$; $(0;-3)$; $(5;3)$; $(1;-\frac{7}{4})$; $(\frac{3}{5};-2)$.
Trouve la solution de (E) dont le premier terme est 5 et la solution de (E) dont le deuxième terme est – 3.

Représentation des solutions d'une équation du 1^er^ degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

10	0	2	4	6	8	10	12	14
8	-2	0	2	4				12
6	-4	-2	0					10
4	-6	-4	-2					8
2	-8	-6						6
0	-10	-8						4
-2	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2
y/x	-2	-1	0	1	2	3	4	5

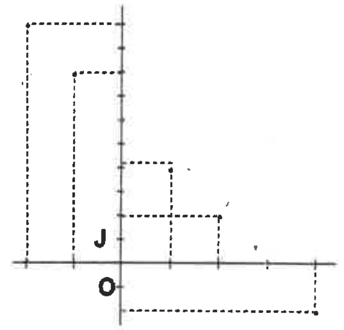
1) On désigne par A l'expression littérale : $2x + y - 6$.

$$A = 2x + y - 6$$

On veut calculer des valeurs numériques de A.
– Pour $x = 4$ et $y = 6$, on a $A = 2 \times 4 + 6 - 6 = 8$
Pour le couple (4;6), la valeur numérique de A est donc 8.
– Pour $x = -2$ et $y = 6$, on a $A = 2 \times (-2) + 6 - 6 = -4$
Pour le couple (–2;6), la valeur numérique de A est donc (–4).

- Complète le tableau ci-contre.
- Donne les sept couples du tableau pour lesquels la valeur numérique de A est 0. Ces couples sont des solutions de :

$$\text{(F)} \quad 2x + y - 6 = 0$$



2) Dans le plan muni du repère (O, I, J), on a placé les points ayant pour couple de coordonnées ces solutions de (F).
Il semble que ces points soient alignés.

- Justifie que les points A(– 1;8), B (0;6) et C (4;– 2) sont alignés.

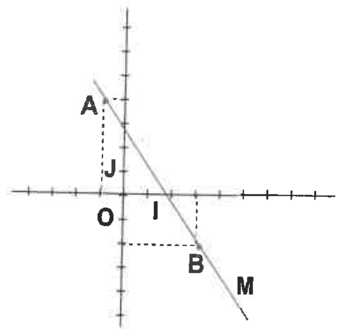
Désignons par (D) la droite qui passe par ces points.
On peut démontrer que :
– chaque point de la droite (D) a pour couple de coordonnées une solution de (F) ;
– chaque point qui a pour couple de coordonnées une solution de (F) appartient à (D).
On dit que l'équation (F) est une **équation de la droite** (D).

(r;s) est une solution de l'équation (F) équivaut à M (r;s) appartient à (D)

2 Équations d'une droite

2.1 RECHERCHE D'UNE ÉQUATION DE DROITE

Droite passant par deux points donnés



Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points A (–1;4) et B (3;–2).
Recherchons une équation de la droite (AB).

M $(x;y)$ est un point du plan. On sait que :

M appartient à (AB) *équivaut à* $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

D'où : M ∈ (AB) *équivaut à* $-6(x+1) - 4(y-4) = 0$.
M ∈ (AB) *équivaut à* $-6x - 4y + 10 = 0$.

On a obtenu une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

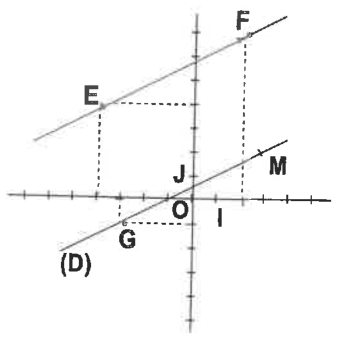
(E) $-6x - 4y + 10 = 0$

(E) est **une équation de la droite** (AB).

- Explique pourquoi les équations suivantes sont aussi des équations de la droite (AB).

(E_1) $3x + 2y - 5 = 0$; (E_2) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$; (E_3) $x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$.

Droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée



Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points E (–4;3), F (2;6) et G (–3; –1).
Recherchons une équation de la droite (D) parallèle à (EF) et passant par G.

M $(x;y)$ est un point du plan. On sait que :

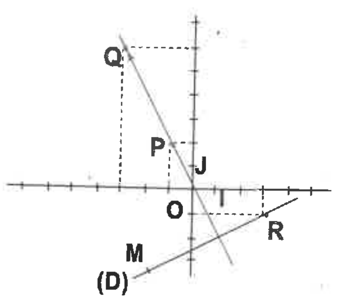
M appartient à (D) *équivaut à* $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

Or : $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

D'où : M ∈ (D) *équivaut à* $3(x+3) - 6(y+1) = 0$
M ∈ (D) *équivaut à* $x - 2y + 1 = 0$

La droite (D) a pour équation : (E) $x - 2y + 1 = 0$.

Droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée



*Le plan est muni du repère **orthonormé** (O, I, J).*
On donne les points P (–1; 2), Q (–3; 6) et R (3;–1).
Recherchons une équation de la droite (D) perpendiculaire à (PQ) et passant par R.

M $(x;y)$ est un point du plan. On sait que :

M appartient à (D) *équivaut à* $\overrightarrow{RM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux.

Or : $\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

D'où : M ∈ (D) *équivaut à* $-2(x-3) + 4(y+1) = 0$
M ∈ (D) *équivaut à* $x - 2y - 5 = 0$

La droite (D) a pour équation : (E) $x - 2y - 5 = 0$.

On admet les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS

Dans le plan muni d'un repère,
- **toute droite a une équation de la forme $px + qy + r = 0$ (p et q n'étant pas tous nuls).**
- **toute équation de la forme $px + qy + r = 0$ est une équation d'une droite (p et q n'étant pas tous nuls).**

EXERCICES

2.a Le plan est muni d'un repère. La droite (D) a pour équation : $3x - 2y + 4 = 0$.
Chacun des points ci-dessous appartient-il à la droite (D) ?
A (3;1), B (1; 3), C (–2;–1), D (3;6).
Les points E $(5;b)$ et F $(a;2)$ appartiennent à la droite (D). Calcule a et b.

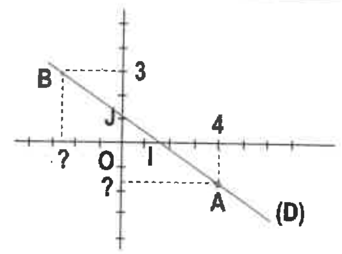
2.b Le plan est muni d'un repère. On donne les points A (4;–3) et B (6;1). Trouve une équation de la droite (AB).

2.c Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points A (3;2), B (–1;–4), et C (–2;1).
Trouve une équation de la droite (D) passant par C et parallèle à la droite (AB).

2.d Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points E (1;3) ; F (–2;–6) et G (2;–2).
Trouve une équation de la droite (D) passant par G et perpendiculaire à (EF).

2.2 CONSTRUCTION D'UNE DROITE

Recherche des couples de coordonnées de points d'une droite

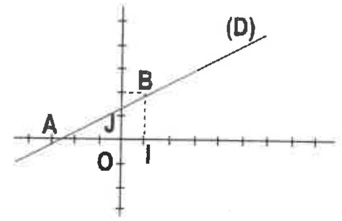


Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $2x + 3y - 4 = 0$.

- Trouve l'ordonnée du point A de (D) d'abscisse 4.
- Trouve l'abscisse du point B de (D) d'ordonnée 3.
- À l'aide de cette équation, exprime y en fonction de x ou x en fonction de y et trouve les couples de coordonnées de plusieurs points de (D).

Construction d'une droite dont on connaît une équation

Le plan est muni du repère (O, I, J). On veut construire la droite (D) d'équation : $x - 2y + 3 = 0$.



Pour cela, il te suffit de trouver deux solutions de l'équation donnée, ce sont les couples de coordonnées de deux points A et B de la droite (D).

	A	B
X	-3	1
Y	0	2

On obtient : A (–3;0) et B (1;2)

Remarque

On pourra choisir judicieusement x ou y afin d'obtenir des points faciles à placer dans le plan muni du repère (O, I, J) (nombres entiers relatifs, de préférence).
On peut aussi choisir l'une des coordonnées égale à 0. On obtient ainsi les couples de coordonnées du point d'intersection de la droite (D) avec l'un des axes.

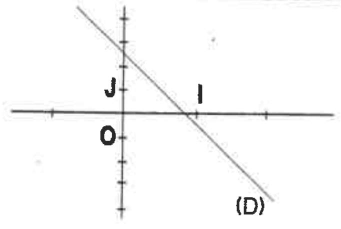
EXERCICES

2.e (D) est la droite d'équation : $2x - y + 3 = 0$.
Construis la droite (D).
La droite (D) coupe (OI) en A et (OJ) en B. Calcule le couple de coordonnées de A et celui de B.

2.f Le plan est muni du repère (O, I, J). Construis les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $(D_1) : 2x - y + 5 = 0$ $(D_2) : x + 3y + 7 = 0$

2.3 COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE

Equation du type $y = ax + b$ ou du type $x = k$



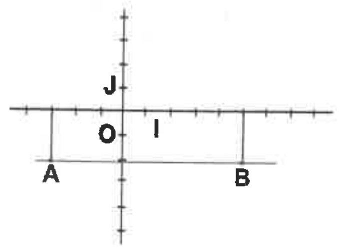
Le plan est muni du repère (O, I, J).

1) (D) est la droite d'équation : $6x + 2y - 5 = 0$ (1).

De l'équation (1), on tire : $y = -3x + \frac{5}{2}$ (2).

C'est aussi une équation de la droite (D).
Elle est de la forme : $\boldsymbol{y = ax + b}$

Plus généralement, on admet que toute droite (D), non parallèle à (OJ) a une équation de la forme $\boldsymbol{y = ax + b}$
a est appelé le **coefficient directeur** de (D) et b **l'ordonnée à l'origine** de (D).

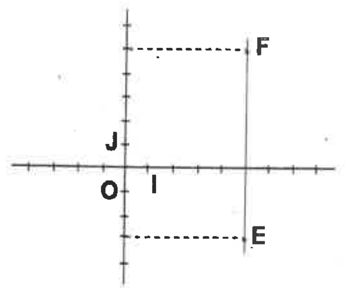


2) On donne les points A (–3;–2) et B (5;–2).
Les points A et B ont la même ordonnée : –2.

- Justifie que la droite (AB) est parallèle à (OI), donc non parallèle à (OJ).

Elle admet une équation de la forme : $\boldsymbol{y = ax + b}$

- Quels sont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette droite (AB) ?



3) On donne les points E (4;–3) et F (4;5).
Les deux points E et F ont la même abscisse : 4.

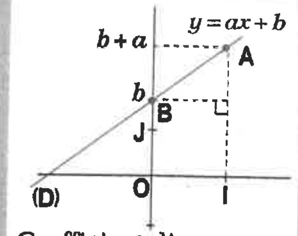
- Justifie que la droite (EF) est parallèle à (OJ).
- Trouve une équation de (EF).

Tu obtiens une équation de la forme : $x = k$.
Cette droite n'admet pas d'équation de la forme : $y = ax + b$
Cette droite n'a ni coefficient directeur ni ordonnée à l'origine.

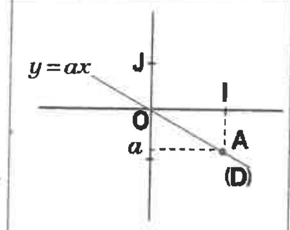
On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉS

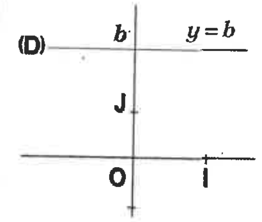
- **Une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme : $y = ax + b$; a est le coefficient directeur de la droite (D), b est son ordonnée à l'origine**
- **Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$. Elle n'a ni coefficient directeur ni ordonnée à l'origine.**



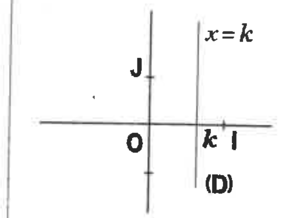
Coefficient directeur a
Vecteur directeur : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$



Coefficient directeur a
Vecteur directeur : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$



Coefficient directeur 0
Vecteur directeur : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$



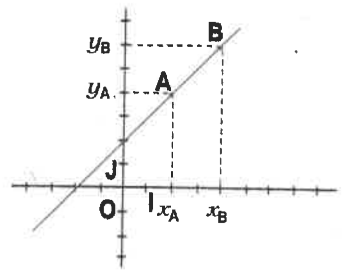
Pas de coefficient directeur. Vecteur directeur : $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Remarque

- Une droite d'équation $y = ax + b$ est nécessairement sécante à l'axe des ordonnées.
- Dans un repère orthonormé, lorsque le coefficient directeur d'une droite est **positif**, il est aussi appelé **pente** de la droite.

Calcul du coefficient directeur d'une droite

Le plan est muni du repère (O, I, J) ; (D) est la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$

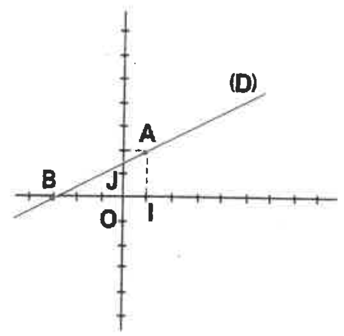


$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de (D).
Donc : $y_A = ax_A + b$ et $y_B = ax_B + b$
$y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b)$
$y_B - y_A = a(x_B - x_A)$
La droite (D) n'est pas parallèle à (OJ) car elle a une équation du type : $y = ax + b$. Donc : $x_B \neq x_A$.

Par conséquent : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Coefficient directeur et équation d'une droite

Le plan est muni du repère (O, I, J).
Cherchons une équation de la droite (D) passant par les points A (1;2) et B (–3;0).



La droite (D) n'étant pas parallèle à (OJ), elle a une équation de la forme $\boldsymbol{y = ax + b}$.

Coefficient directeur de la droite (D) : $a = \dfrac{0-2}{-3-1} = \dfrac{1}{2}$

(D) a donc une équation de la forme : $y = \frac{1}{2}x + b$ (1)

A (1;2) appartient à (D) ; (1;2) est donc solution de l'équation (1)

D'où : $2 = \frac{1}{2} \times 1 + b$; $b = \frac{3}{2}$

(D) a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

EXERCICES

2.g Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points A (1;3) et B (–3;–5).
Trouve l'équation de la droite (AB) du type $y = ax + b$ ou $x = k$.

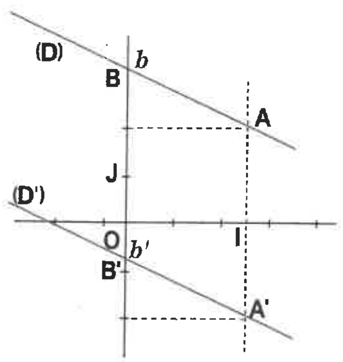
2.h Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points C (4;–2) et D (–5;–2).
Trace la droite (CD) et trouve l'équation de cette droite du type $y = ax + b$ ou $x = k$.

2.i Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points E (3;–5) et F (3;2).
Trace la droite (EF) et trouve une équation de cette droite.

3 Positions relatives de deux droites

3.1 DROITES PARALLÈLES

Présentation



Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $y = ax + b$.
(D') est la droite d'équation : $y = a'x + b'$.
Cherchons une condition pour qu'on ait : (D) // (D').

A et B sont les points de (D) d'abscisses respectives 1 et 0 :
A (1; $a + b$) et B (0; b)
A' et B' sont les points de (D') d'abscisses respectives 1 et 0 :
A' (1; $a' + b'$) et B' (0; b')
On sait que :

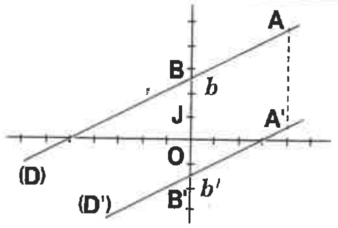
(D)//(D') *équivaut à* $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{B'A'}$ ont même direction.

Or : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B'A'}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$

D'où : (D) // (D') *équivaut à* $1 \times a' - 1 \times a = 0$
(D) // (D') ***équivaut à*** $a = a'$

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni du repère (O, I, J).
Les droites (D) et (D') ont pour coefficients directeurs a et a'
(D)//(D') ***équivaut à*** $a = a'$



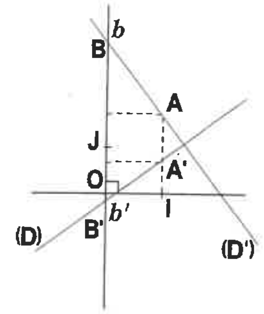
EXERCICES

3.a Le plan est muni d'un repère. Les droites définies ci-dessous par une équation sont-elles parallèles ?
(D) : $x - 3y + 4 = 0$; (D') : $-\frac{1}{3}x + y - 2 = 0$.

3.b Le plan est muni du repère (O, I, J). (D) est la droite d'équation $y = 3x - 2$.
Trouve une équation de (D'), parallèle à (D) et passant par le point A (–2;–3).

3.2 DROITES PERPENDICULAIRES

Présentation



Le plan est muni du repère **orthonormé** (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $y = ax + b$.
(D') est la droite d'équation : $y = a'x + b'$.
Cherchons une condition pour qu'on ait : (D) ⊥ (D').

A et B sont les points de (D) d'abscisses respectives 1 et 0 :
A (1; $a + b$) et B (0;b)
A' et B' sont les points de (D') d'abscisses respectives 1 et 0 :
A' (1; $a' + b'$) et B' (0; b')
On sait que :

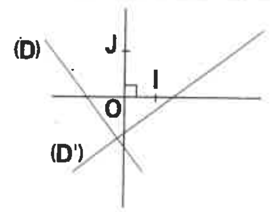
(AB) ⊥ (A'B') *équivaut à* $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{B'A'}$.

Or : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B'A'}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$

D'où : (D) ⊥ (D') *équivaut à* $1 \times 1 + a \times a' = 0$.
(D) ⊥ (D') ***équivaut à*** $a \times a' = -1$.

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).
Les droites (D) et (D') ont pour coefficients directeurs a et a
(D) ⊥ (D') ***équivaut à*** $a \times a' = -1$



EXERCICES

3.c Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
A (1;4), B (–5;–2) et C (2;–1) sont trois points du plan.
Détermine une équation de (AB).
H est le projeté orthogonal de C sur (AB). Détermine une équation de (CH).

3.d Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A (–1; 3) et B(3;1).
Détermine une équation de la médiatrice (D) du segment [AB].

ENTRAÎNEMENT

1 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1 Dans chacun des cas suivants, calcule x et y pour que les couples de nombres réels soient égaux :
1) $(2x - 3;-5)$ et $(-1;3y + 2)$.
2) $(2;-5y)$ et $(\frac{3}{4}x;-\frac{2}{3})$.

2 On donne l'équation (E) $3x - 5y = 4$.
1) Trouve les deux couples solutions de (E) de la forme $(x;0)$ et $(0;y)$.
2) Trouve deux couples $(x;y)$ solutions de (E) tels que x et y soient des nombres entiers naturels.

3 Bintou veut constituer une somme de 125 F en n'utilisant que des pièces de 10 F et des pièces de 25 F.
Trouve toutes les solutions possibles.

4 L'unité de longueur est le cm.
ABC est un triangle isocèle de périmètre 12.
Trouve la longueur de chacun de ses côtés, sachant que ce sont des nombres entiers naturels. Construis le triangle ABC correspondant à chaque solution.

2 ÉQUATIONS D'UNE DROITE

5 Le plan est muni du repère (O, I, J).
A et B sont deux points de ce plan.
Trouve une équation de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :
1) A $(-3;2)$ et B $(1;5)$
2) A $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et B $(2;-2)$
3) A $(2;3)$ et B $(2;-4)$
4) A $(3;-2)$ et B $(\frac{7}{2};-2)$

6 Le plan est muni du repère (O, I, J).
A $(5;3)$, B $(-3;2)$ et C $(0;-4)$ sont trois points.
1) Justifie que ces points ne sont pas alignés.
2) Trouve une équation de la droite (D) dans chacun des cas suivants :
– (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.
– (D) est la droite passant par B et parallèle à la droite (AC).

7 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(L) est la droite d'équation : $-2x + 3y - 1 = 0$.
Parmi les points suivants,
A $(2;-1)$, B $(1;1)$, C $(-0,5;0)$ et D $(2;0)$
indique ceux qui appartiennent à (L).

8 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $x - 5y + 2 = 0$.
Donne le couple de coordonnées d'un vecteur directeur de (D).
(Tu pourras utiliser deux points de (D).)

9 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $12x - 4y + 8 = 0$.
Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui sont aussi des équations de (D) ?
1) $6x - 2y + 4 = 0$
2) $-3x + y + 2 = 0$
3) $24x + 8y + 16 = 0$
4) $18x - 6y + 12 = 0$
5) $3x - y + 2 = 0$
6) $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0$

10 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $360x - 108y - 810 = 0$.
Trouve quatre équations de cette droite.

11 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Construis les droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4), (D_5) et (D_6) d'équations respectives :
$(D_1) : 3x - 5y + 2 = 0$
$(D_2) : y = -\frac{2}{3}x + 3$
$(D_3) : 2y = 5x - 3$
$(D_4) : -3x + 5 = 0$
$(D_5) : 5y + 4 = 0$
$(D_6) : 2x - 3y = 0$

12 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Les droites (D_1), (D_2) et (D_3) ont pour équation :
$(D_1) : 5x - 3y + 2 = 0$
$(D_2) : 5y + 3 = 0$
$(D_3) : -3x + 7y + 1 = 0$
$(D_4) : 2x + 3y = 0$
Pour chacune de ces droites, donne l'équation de la forme : $y = ax + b$.

13 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) sont quatre droites d'équations :
$(D_1) : y = -5x + 2$
$(D_2) : y = -7$
$(D_3) : y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}$
$(D_4) : y = 3x$
Pour chacune de ces droites, donne le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

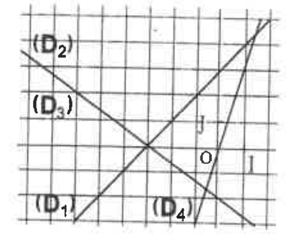
14 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, calcule le coefficient directeur de la droite (AB) :
1) A $(3;5)$ et B $(1;-2)$;
2) A $(-1;-4)$ et B $(-3;-2)$;
3) A $(\frac{1}{2};2)$ et B $(0;-\frac{2}{3})$;
4) A $(3;0)$ et B $(-3;\frac{3}{4})$.

15 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Sans déterminer leur équation, construis les droites (D_1), (D_2) et (D_3) passant par O et de coefficients directeurs respectifs 3, -2, $-\frac{3}{4}$.

16 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Sans déterminer leur équation, trace les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) :
– (D_1) est parallèle à (OI) et a pour ordonnée à l'origine -2 ;
– (D_2) est parallèle à (OJ) et passe par le point A $(3;0)$;
– (D_3) a pour coefficient directeur -2 et pour ordonnée à l'origine 3.
– (D_4) a pour coefficient directeur $-\frac{2}{3}$ et passe par le point O.

17 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, donne l'équation de la forme $y = ax + b$ de la droite (D) qui passe par le point A :
1) A $(-1;1)$ et $a = \frac{4}{3}$
2) A $(2;-1)$ et $b = -2$
3) A $(-3;-3)$ et $b = -\frac{3}{2}$
4) A $(5;-5)$ et $a = 0$

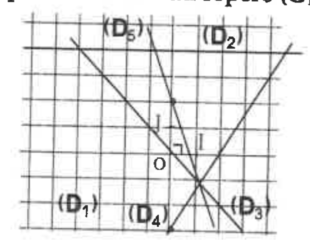
18 Le plan est muni du repère (O, I, J).



Par simple lecture sur la figure donne le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4).
Donne une équation de ces droites.

19 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les droites :
$(D_1) : 3y = 7$
$(D_2) : 2x = -5$;
$(D_3) : 2y + 5 = 0$
$(D_4) : -3x + 5 = 7$;
$(D_5) : 2x + 3y = 0$
$(D_6) : -2(x - y) = 0$.
Parmi ces droites indique celles :
– qui sont parallèles à l'axe des abscisses ;
– qui sont parallèles à l'axe des ordonnées ;
– qui passent par l'origine O du repère.

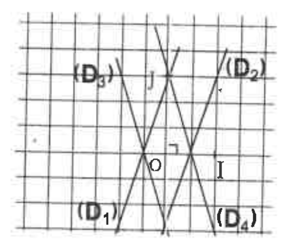
20 Le plan est muni du repère (O, I, J).



Examine le graphique ci-dessus et associe une droite et une seule à chacune des équations suivantes :
$y + x = 0$; $x = -3$
$3x + y - 2 = 0$;
$y = \frac{3}{2}x - 3$; $y = 4$.

21 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Construis la droite (D) passant par le point A $(0;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ $(-2;3)$.
Les points H $(1;-\frac{1}{2})$ et K $(4;-4)$ appartiennent-ils à (D) ?

22 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Examine le graphique ci-dessous et associe une droite et une seule à chacune des équations suivantes :
(1) $y = 2x + 1$; (2) $y = -2x + 1$;
(3) $y = 2x - 1$; (4) $y = -2x - 1$.



3 POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

23 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(L) est la droite d'équation : $y = \frac{2}{5}x - 4$.
Donne une équation de la forme $y = ax + b$ de chacune des droites (L_1), (L_2) et (L3) parallèles à (L) et telles que :
– (L_1) passe par le point O ;
– (L_2) passe par le point J ;
– (L_3) a pour ordonnée à l'origine $\frac{3}{2}$.

24 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Parmi les droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4), (D_5), (D_6), nomme celles qui sont parallèles :

$(D_1) : y = -3x + \frac{1}{2}$	$(D_2) : 3x + y - 3 = 0$
$(D_3) : y - 2x = 0$	$(D_4) : y = -3x - 4$
$(D_5) : 5x + 3 = 0$	$(D_6) : -6x + 3y - 1 = 0$

25 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par le point A et parallèle à la droite (D) :
1) A (3;2) ; (D) : $4x - 3y + 2 = 0$.
2) A (–3;2) ; (D) : $y = -\frac{1}{3}x + 4$.
3) A (2;–5) ; (D) : $y = -\frac{5}{2}$.
4) A (–3;–1) ; (D) : $x = -1$.

26 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par le point A et parallèle à la droite (BC) :
1) A (1;2) ; B (4;–3) ; C (–3;2).
2) A (5;–3) ; B (–1;2) ; C (3;2).
3) A (3;–1) ; B (1;0) ; C (1;4).

27 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
(L) est la droite d'équation : $y = -\frac{2}{5}x - 2$.
Donne une équation de la forme $y = ax + b$ de chacune des droites (L_1), (L_2) et (L_3) perpendiculaires à (L) et telles que :
1) (L_1) passe par le point O ;
2) (L_2) passe par le point I ;
3) (L_3) a pour ordonnée à l'origine $-\frac{2}{3}$.

28 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Parmi les droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4), (D_5), (D_6), nomme celles qui sont perpendiculaires :

$(D_1) : y = -2x + \frac{1}{2}$	$(D_2) : 3x - y - 3 = 0$;
$(D_3) : y - \frac{1}{2}x - 1 = 0$	$(D_4) : y = -\frac{1}{3}x - 4$;
$(D_5) : x - 2y - 3 = 0$	$(D_6) : 2x - y + 3 = 0$.

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (D) :
1) A (–3;5) ; (D) : $3x - 2y + 1 = 0$.
2) A (0;–2) ; (D) : $y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}$.
3) A (–2;–3) ; (D) : $y = \frac{5}{2}$.
4) A $(\frac{2}{3};-1)$; (D) : $x = -3$.

30 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC) :
1) A (0;–2) ; B (4;–3) ; C (1;–2).
2) A (1;–1) ; B (–1;2) ; C (3;2).
3) A (2;–1) ; B (1;3) ; C (1;–3).

31 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Parmi les droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4), (D_5), (D_6), nomme celles qui sont parallèles et celles qui sont perpendiculaires :

$(D_1) : y = -3x + \frac{2}{3}$	$(D_2) : -3x + y - 3 = 0$
$(D_3) : y - \frac{1}{3}x - 2 = 0$	$(D_4) : y = -\frac{1}{2}x - 4$
$(D_5) : x + 3y + 3 = 0$	$(D_6) : y + 3 = 0$.

32 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $3x - 7y + 21 = 0$.
1) Trouve le couple de coordonnées du point A, intersection de (D) et (OI) et du point B, intersection de (D) et (OJ).
2) Donne, sans calcul, le couple de coordonnées du point C, symétrique de O par rapport au milieu M de [AB].

APPROFONDISSEMENT

33 Le plan est muni d'un repère orthonormé. (D) est la droite d'équation : $y = px + 2$, p étant un nombre réel.
Dans chacun des cas suivants, détermine p tel que :
1) (D) passe par le point A $(\frac{2}{3};1)$.
2) (D) est parallèle à la droite (D_1) d'équation : $3x - 2y + 7 = 0$.
3) (D) est perpendiculaire à la droite (D_2) d'équation : $-2x - 5y - 4 = 0$.

34 Le plan est muni du repère (O, I, J).
a est un nombre réel et (D) est une droite d'équation : $ax + (a + 1)y + a - 1 = 0$.
1) Pour quelle valeur de a, (D) est-elle parallèle à (OI) ? Dans ce cas, donne une équation.
2) Pour quelle valeur de a, (D) est-elle parallèle à (OJ) ? Dans ce cas, donne une équation de (D) ?
3) Pour quelle valeur de a, (D) passe-t-elle par O ? Dans ce cas, donne une équation.

35 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre réel k pour que les droites (D) et (D') soient parallèles, puis trouve une équation de chacune des droites (D) et (D') :
1) (D) a pour équation : $y = -\sqrt{3}x - 3$;
(D') a pour équation : $kx + \frac{1}{2}y - 1 = 0$.
2) (D) passe par les points A $(3;-\frac{2}{5})$ et B (4;0) ;
(D') a pour équation : $y = kx - \sqrt{2}$.
3) (D) passe par les points E (–1;3) et F (2;k) ;
(D') passe par le point G (–3;0) et admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ (1;1).

36 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre réel m pour que les droites (D) et (D') soient perpendiculaires, puis trouve une équation de chacune des droites (D) et (D') :
1) (D) a pour équation : $2x - 3y + 1 = 0$;
(D') a pour équation : $y = mx - 2$.
2) (D) passe par A (1;2) et B (1;–3) ;
(D') a pour équation : $mx - 2y + 3 = 0$.
3) (D) passe par M $(3;-\frac{7}{2})$ et N $(-1;m)$;
(D') passe par P (5;1) et admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{RS}$ (–2;1).

37 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Les droites (D) et (D') ont pour équations respectives : $-x + 4y - 3 = 0$ et $y = 2x - \frac{3}{2}$.
Démontre que les droites (D) et (D') sont sécantes et calcule le couple de coordonnées de leur point d'intersection.

38 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). La droite (D) coupe (OI) au point A d'abscisse 1 et (OJ) au point B d'ordonnée $\sqrt{2}$.
1) Quelle est l'équation de (D) de la forme $y = ax + b$?
2) Quelle est l'ordonnée du point E de (D) d'abscisse $1 + \sqrt{2}$?
3) Donne une équation de la droite (D') perpendiculaire à (D) et passant par E.

39 Le plan est muni d'un repère orthonormé. A (0;–3), B (–3;6) et C (5;2) sont trois points de ce plan. La droite perpendiculaire à (BC) passant par A coupe (BC) en A' et la droite perpendiculaire à (AC) passant par B coupe (AC) en B'.
1) Détermine une équation de chacune des droites (AA') et (BB').
Démontre que (AA') et (BB') sont sécantes en un point H et calcule son couple de coordonnées.
2) Justifie sans calcul que : (AB) ⊥ (HC).
Puis, vérifie-le par un calcul.

40 Le plan est muni du repère (O, I, J).
A (–1;3) et B (5;–2) sont deux points de ce plan.
1) Détermine le couple de coordonnées du point K tel que : $3\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.
Justifie que les points A, B et K sont alignés.
2) Détermine une équation de la droite (AB) et vérifie par un calcul que K appartient à (AB).

41 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) et (D') sont deux droites de ce plan, sécantes en un point A d'abscisse –2.
(D) coupe (OJ) au point d'ordonnée 4.
(D') a pour équation : $2x - 3y + 1 = 0$.
Détermine une équation de (D).

42 Le plan est muni d'un repère orthonormé. La droite (D) passe par le point A (–1;1) et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$ (3;–4).
La droite (D') passe par le point B(0;3) et est perpendiculaire à (D).
Détermine le couple de coordonnées de K, point d'intersection de (D) et (D').

43 Le plan est muni du repère ortnonormé (O, I, J). p et q sont des nombres réels.
(D) a pour équation : $y = px + \sqrt{3}$.
(D') a pour équation : $y = 2x + q$.
Détermine les nombres réels p et q pour que (D) et (D') soient perpendiculaires et coupent (OJ) en un même point A dont tu préciseras l'ordonnée.

44 Le plan est muni d'un repère orthonormé. A (–6;–4), B (8;–6) et C (–1;6) sont trois points. Détermine le couple de coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

45 Le plan est muni d'un repère orthonormé. A (1;3), B (–4;–2) et C (5;1) sont trois points. Détermine le couple de coordonnées du point K, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

46 Le plan est muni du repère (O, I, J).
A (–1;4), B (6;–1) et C (0;–3) sont trois points. Les points A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].
1) Détermine une équation de chacune des médianes (AA') et (BB').
Détermine le couple de coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.
2) Vérifie par un calcul que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

47 Le plan est muni du repère (O, I, J).
A (2;5) et B (–4;3) sont deux points.
Trouve une équation de la droite (A'B'), image de la droite (AB) par la translation de vecteur de couple de coordonnées (2;–7).

48 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $y = -\frac{3}{2}x - 5$.
Trouve une équation de la droite (D'), image de (D) par la translation de vecteur de couple de coordonnées (4;3).

49 Le plan est muni du repère (O, I, J).
A (–2;4), B (4;–3) et C (–1;–2) sont trois points. Trouve une équation de la droite (A'B'), image de la droite (AB) par la symétrie S_C.

50 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1) Trace la droite (D) d'équation : $2x - 5y + 3 = 0$
2) Trouve une équation de la droite (D'), image de (D) par la symétrie de centre K (3;–1).

RECHERCHE

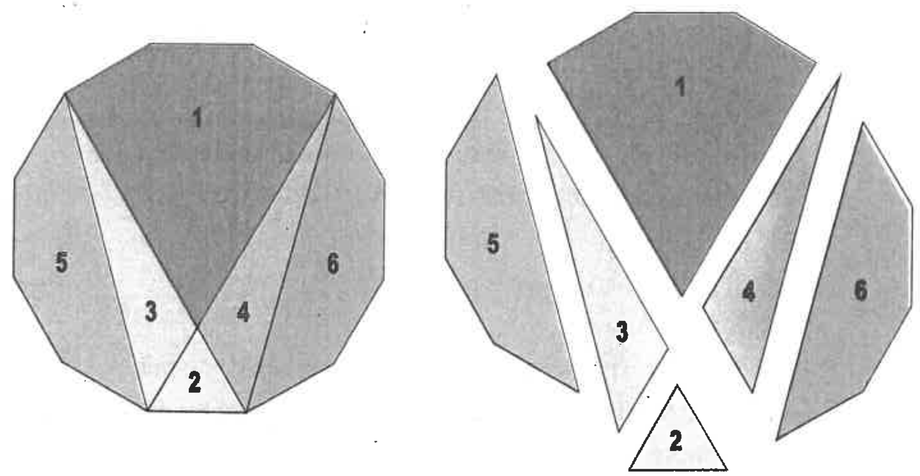
51 Le plan est muni du repère (O, I, J).
x désigne la taille d'une personne, exprimée en cm. Son « poids théorique » y, exprimé en kg, est donné par la formule : $y = x - 100 - \frac{x - 150}{4}$
1) Quel est le « poids théorique » d'un élève mesurant 1,50 m ?
Quel est le « poids théorique » d'un joueur de basket-ball dont la taille est 2,10 m ?
2) Quelle est la taille d'une personne dont le « poids théorique » est 65 kg ?
3) Écris l'égalité initiale sous la forme $y = ax + b$ et précise les nombres a et b.
Construis dans le repère (O, I, J), la droite (D) d'équation $y = ax + b$ (unités : 1 cm pour 10 cm de taille en abscisse et 1 cm pour 10 kg de poids en ordonnée).
4) On estime que le « poids idéal » est inférieur de 10 % au « poids théorique ».
Calcule le « poids idéal » d'une personne dont la taille est 1,60 m.
5) Trouve l'égalité de la forme $y = mx + p$ donnant le « poids idéal » en fonction de la taille.
Calcule la taille d'une personne dont le « poids idéal » est 45 kg.

52 **Droite d'Euler**
Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A (7;1), B (5;–5) et C (1;7).
Dans le triangle ABC, on désigne par H l'orthocentre, G le centre de gravité et P le centre du cercle circonscrit.
1) Démontre que H, G et P sont alignés.
2) Détermine une équation de la droite (D), dite « Droite d'Euler », qui passe par ces trois points.

6

Angles inscrits

Un Puzzle



Découpe un dodécagone régulier en 6 parties telles qu'elles sont indiquées sur la figure.

En remarquant que la figure est symétrique par rapport à un axe, assemble ces 6 parties de manière symétrique de façon à former un carré.

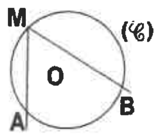
Comment peux-tu démontrer que la figure formée est un carré ?

SOMMAIRE

1 Angles inscrits dans un cercle

1.1 NOTION D'ANGLE INSCRIT

Présentation



(𝒞) est un cercle de centre O.
A, B et M sont trois points du cercle (𝒞).
L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé **angle inscrit** dans le cercle (𝒞).

- Dans chacun des cas suivants, dis si l'angle tracé est un angle inscrit dans le cercle.

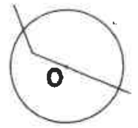


fig. 1

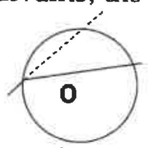


fig. 2

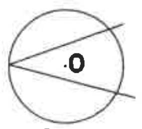


fig. 3

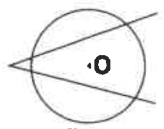


fig. 4

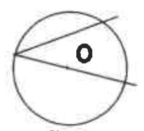
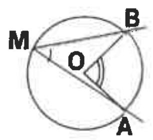


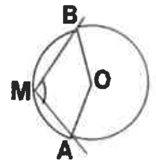
fig. 5

Arc intercepté par un angle inscrit

A,M,B sont trois points d'un cercle.
L'arc de cercle intercepté par l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est l'arc d'extrémités A et B ne contenant pas M.



– L'angle aigu inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
– L'arc $\overset{\frown}{AB}$ est intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
On dit que **l'angle au centre** $\widehat{AOB}$ est **associé** à l'angle aigu inscrit $\widehat{AMB}$.



– L'angle obtus inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

EXERCICES

1.a Sur la figure 1, marque un point B tel que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ soit aigu.
Sur la figure 2, marque un point A tel que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ soit droit.
Sur la figure 3, marque un point M tel que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ soit obtus.

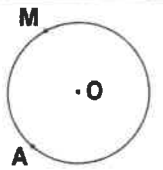


fig. 1

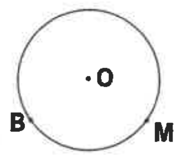


fig. 2

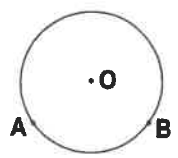
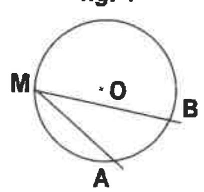
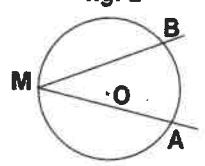
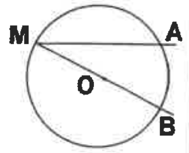


fig. 3

1.b Dans chacun des cas ci-contre, trace l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

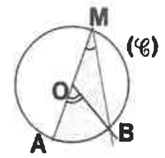






1.2 MESURE D'UN ANGLE INSCRIT

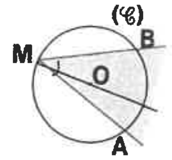
Mesure d'un angle aigu inscrit dans un cercle

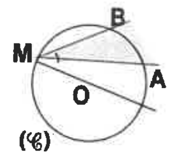


(𝒞) est un cercle de centre O. A, B et M sont trois points de (𝒞).

1) Sur la figure ci-contre, [AM] est un diamètre de (𝒞).
- Justifie que : mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

(Tu pourras considérer le triangle isocèle MOB.)

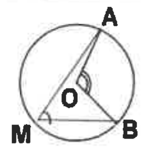




2) Dans les deux cas ci-contre,
justifie que : mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
(On a tracé le diamètre (OM) pour se ramener au cas précédent.)

PROPRIÉTÉS

Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.



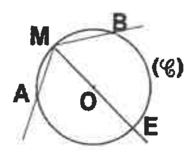
$$\boxed{\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}}$$

EXERCICES

1.c Les points A, B et E d'un cercle (𝒞) sont tels que l'angle inscrit $\widehat{AEB}$ est associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$. La bissectrice de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ coupe l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en F.
Compare les mesures des angles $\widehat{AOF}$ et $\widehat{AEB}$.

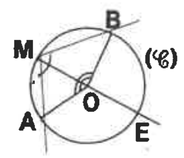
1.d Trace un triangle isocèle en A inscrit dans un cercle (𝒞) tel que : mes $\widehat{BOC} = 80°$
Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?

Mesure d'un angle obtus inscrit dans un cercle



$\widehat{AMB}$ est un angle obtus inscrit dans un cercle (𝒞) de centre O.
[EM] est un diamètre de (C).
- Justifie que : mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$(mes $\widehat{AOE}$ + mes $\widehat{EOB}$).
- Justifie que : mes $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$

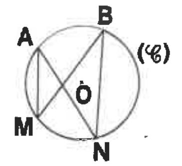
FORMULES DE LA MESURE D'UM ANGLE OBTUS INSCRIT

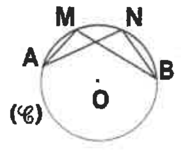


$$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} (\text{ mes } \widehat{AOB} + \text{mes } \widehat{EOB})$$
$$\text{mes } \widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}$$

1.3 ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MÊME ARC

Activité



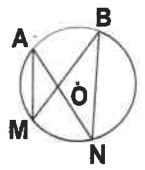


Dans chacun des cas ci-contre, $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ deux angles inscrits qui interceptent le même arc.

• Justifie que : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.

PROPRIÉTÉ

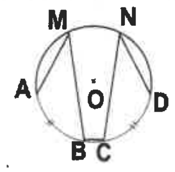
• Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.



$\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$

mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$

• Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont la même mesure.

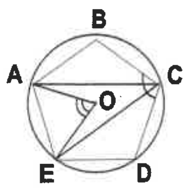


longueur de $\overset{\frown}{AB}$ = longueur de $\overset{\frown}{CD}$

mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{CND}$

2 Angles inscrits et configurations du plan

Polygone régulier



ABCDE est un pentagone régulier.

• Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ACE}$.

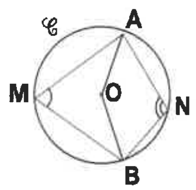
(Calcule au préalable la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOE}$.)

• Quelle est la mesure de chacun des angles de ce pentagone ?

Plus généralement, on considère un polygone régulier ayant n côtés (n, nombre entier naturel supérieur ou égal à 3).

• Exprime en fonction de n la mesure de chacun de ses angles.

Quadrilatère inscriptible dans un cercle



A, B, M et N sont des points d'un cercle $\mathscr{C}$ (O;r) tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit aigu et l'angle $\widehat{ANB}$ soit obtus.

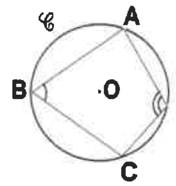
• Exprime mes $\widehat{AMB}$ et mes $\widehat{ANB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$;

Justifie que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.

• Démontre de même que les angles $\widehat{MAN}$ et $\widehat{MBN}$ sont supplémentaires.

PROPRIÉTÉ

Si un quadrilatère est inscriptible dans un cercle, alors ses angles opposés sont supplementaires.



mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{ABC}$ = 180 °

mes $\widehat{BAD}$ + mes $\widehat{BCD}$ = 180 °

Exemple

$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB]. C est un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe $(\mathscr{C})$ en D. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ recoupe $(\mathscr{C})$ en F.

1) Compare les angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DAB}$. Démontre que le triangle BDC est isocèle.

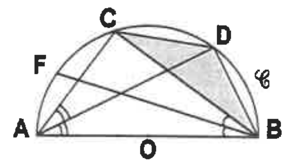
2) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DBF}$? Démontre que les droites (DO) et (FO) sont perpendiculaires.

Comparons $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DAB}$. Démontrons que le triangle BDC est isocèle.

La droite (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$, donc : mes $\widehat{CAD}$ = mes $\widehat{DAB}$ (1)

Les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$ interceptent l'arc $\overset{\frown}{CD}$, donc : mes $\widehat{CAD}$ = mes $\widehat{CBD}$ (2)

Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ interceptent l'arc $\overset{\frown}{BD}$, donc : mes $\widehat{DAB}$ = mes $\widehat{DCB}$ (3)



Des égalités (1) et (2), on tire : mes $\widehat{DAB}$ = mes $\widehat{DBC}$ (4)

Des égalités (3) et (4), on tire : mes $\widehat{DBC}$ = mes $\widehat{DCB}$

Le triangle BCD est donc isocèle.

Calculons mes $\widehat{DBF}$. Démontrons que : (DO) ⊥ (FO).

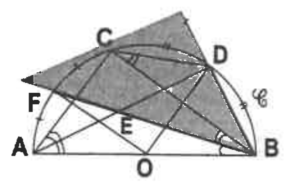
Les deux angles adjacents $\widehat{FBC}$ et $\widehat{CBD}$ composent l'angle $\widehat{DBF}$.

La droite (FB) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$, donc : mes $\widehat{CBD}$ = mes $\widehat{CAD}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{BAC}$,

La droite (AD) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc : mes $\widehat{FBC}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{ABC}$

Par conséquent : mes $\widehat{DBF}$ = mes $\widehat{FBC}$ + mes $\widehat{CBD}$ = $\frac{1}{2}$ (mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{BAC}$) (5)

ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AB], donc : mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{BAC}$ = 90° (6)



De (5) et (6), on tire : mes $\widehat{DBF}$ = $\frac{1}{2}$ (90°) = 45°.

L'angle au centre $\widehat{DOF}$ intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{DBF}$.

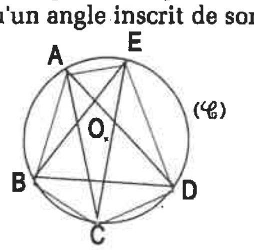
Donc : mes $\widehat{DOF}$ = 2 × mes $\widehat{DBF}$ = 90°

Les droites (OD) et (OF) sont perpendiculaires.

ENTRAÎNEMENT

1 ANGLES INSCRITS DANS UN CERCLE

1 ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O.
A, B, C, D et E sont des points de ce cercle.
a) Cite les angles inscrits de sommet A.
b) Cite les angles inscrits ayant pour sommet un point autre que A et qui interceptent le même arc qu'un angle inscrit de sommet A.



2 On donne un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
A et B sont deux points de ce cercle qui ne sont pas diamétralement opposés.
1) Place trois points M_1, M_2 et M_3 tels que les angles $\widehat{AM_1B}$, $\widehat{AM_2B}$ et $\widehat{AM_3B}$ soient des angles aigus inscrits dans le cercle ($\mathscr{C}$).
Où se trouvent tous les points M du plan tels que $\widehat{AMB}$ soit un angle aigu inscrit dans ($\mathscr{C}$) ?
2) Place trois points N_1, N_2 et N_3 tels que les angles $\widehat{AN_1B}$, $\widehat{AN_2B}$ et $\widehat{AN_3B}$ soient des angles obtus inscrits dans le cercle ($\mathscr{C}$).
Où se trouvent tous les points N du plan tels que $\widehat{ANB}$ soit un angle obtus inscrit dans ($\mathscr{C}$) ?

3 ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, [AB] une corde ne passant pas par O et E un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
La bissectrice de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ coupe l'arc $\overset{\frown}{AB}$ au point F.
Compare mes $\widehat{AOF}$ et mes $\widehat{AEB}$.

4 ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O tel que :
mes $\widehat{AOF}$ = 30° et mes $\widehat{CAB}$ = 45°.
Calcule la mesure de chacun des angles $\widehat{DOA}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{ODA}$, $\widehat{DAO}$, $\widehat{OCB}$ et $\widehat{OBC}$.

5 ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') sont deux cercles de centre O, de rayons respectifs *r* et *r'* (*r'* < *r*).
A et B sont deux points de ($\mathscr{C}$) non diamétralement opposés.
[AO) coupe ($\mathscr{C}$') au point A' et [BO) coupe ($\mathscr{C}$') au point B'.
M est un point de $\overset{\frown}{AB}$ et N un point de $\overset{\frown}{A'B'}$.
Démontre que : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{A'NB'}$.

6 ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O.
ABC est un triangle isocèle en A et inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$).
(D) et (L) sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
(D) et (L) recoupent ($\mathscr{C}$) respectivement aux points M et N.
Démontre que : mes $\widehat{ANC}$ = mes $\widehat{AMB}$.

7 On donne un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O. ABC est un triangle inscrit dans ce cercle tel que :
mes $\widehat{ABC}$ = 85° et mes $\widehat{BCA}$ = 50°.
1) Fais une esquisse.
Calcule mes $\widehat{BOC}$ et détermine la nature du triangle BOC.
2) Donne un programme de construction du triangle ABC.

8 [AB] est un diamètre d'un cercle ($\mathscr{C}$).
La médiatrice de [AB] coupe le cercle ($\mathscr{C}$) aux points I et J.
P est un point de l'arc $\overset{\frown}{AJ}$, distinct de A et de J.
Le point M est le projeté orthogonal de A sur (PI). Démontre que le triangle AMP est isocèle.

9 ABC est un triangle inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et tel que :
les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents ;
mes $\widehat{AOB}$ = 50° et mes $\widehat{BOC}$ = 100°.
Calcule la mesure de chacun des angles du triangle ABC.

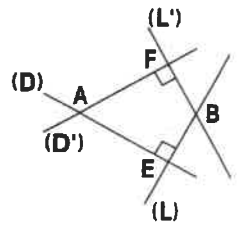
10 ABC est un triangle inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe le cercle ($\mathscr{C}$) au point A'.
[A'B'] est la corde de ($\mathscr{C}$) telle que (A'B') est parallèle à (AB).
Démontre que : (B'C) // (AA').

11 ABC est un triangle isocèle en A inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit aigu.
D est le point diamétralement opposé à B.
1) Démontre que : mes $\widehat{ADB}$ = mes $\widehat{ABC}$
2) Démontre que les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{ADB}$ sont complémentaires.

12 [AB] et [CD] sont deux diamètres d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
Le point M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AC}$ et le point N appartient à l'arc $\overset{\frown}{BD}$.
Compare les mesures des angles $\widehat{CNB}$ et $\widehat{AMD}$.

2 ANGLES INSCRITS ET CONFIGURATIONS DU PLAN

13 Dans la figure codée ci-contre, démontre que les angles $\widehat{EAF}$ et $\widehat{EBF}$ sont supplémentaires.



14 ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ (O;*r*) et tel que :
mes $\widehat{BAD}$ = 105° et mes $\widehat{ABC}$ = 85°.
Calcule la mesure de chacun des autres angles de ce quadrilatère.

15 ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de rayon *r*
A, B, C et D sont quatre points de ($\mathscr{C}$) tels que :
[AC] est un diamètre de ($\mathscr{C}$) ;
AB = *r*, D ∈ $\overset{\frown}{BC}$ et mes $\widehat{DCA}$ = 50°.
Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère ABDC.

16 Les polygones suivants sont des polygones réguliers inscrits dans un cercle.
Complète le tableau ci-dessous.

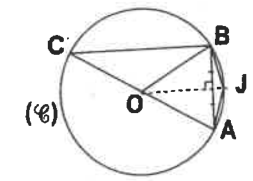
Polygone	Angle au centre en °	Angle au sommet en °
Pentagone		
Hexagone		
Octogone		
Ennéagone		
Décagone		
Dodécagone		

Les exercices 17 et 18 utilisent les résultats de l'exercice 16.

ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
1) Calcule la mesure de chacun des angles des triangles COD, ABC et ACD.
2) Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère OCDE.
Quelle est la nature du quadrilatère OCDE ?
3) Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère ABDE.
Détermine la nature du quadrilatère ABDE.

18 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
1) Calcule la mesure de chacun des angles des triangles ACD et ABC.
2) Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère ABCD et détermine sa nature.

19 [AC] est un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon *r*.
[AB] est une corde de ($\mathscr{C}$) telle que : AB = *r*.
La médiatrice de [AB] coupe l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en J.
Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère ACBJ.



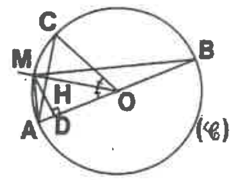
APPROFONDISSEMENT

20 ABC est un triangle inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$). [AD] est un diamètre de ($\mathscr{C}$) et [AH] est une hauteur du triangle ABC.
La bissectrice de $\widehat{BAC}$ recoupe le cercle ($\mathscr{C}$) en E. Compare les angles des triangles AHC et ABD.
Démontre que (AE) est la bissectrice de $\widehat{DAH}$.

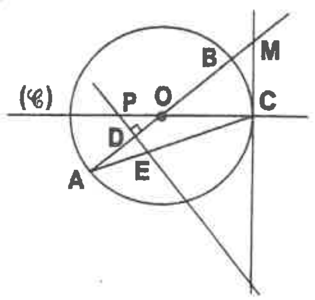
21 ABC est un triangle inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$). [AA'] est un diamètre de ($\mathscr{C}$) et [AH] une hauteur du triangle ABC.
Démontre que : AB × AC = AH × AA'.
(Tu pourras utiliser deux triangles semblables.).

22 ABC est un triangle dont les trois angles sont aigus; H est l'orthocentre de ce triangle.
($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit à ABC.
Les droites (AH), (BH) et (CH) recoupent ($\mathscr{C}$) respectivement aux points M, N et P.
1) Démontre que : mes $\widehat{ABN}$ = mes $\widehat{PCA}$.
2) Justifie que (AM) est la bissectrice de $\widehat{PMN}$.

23 [AB] est un diamètre d'un cercle (𝒞) de centre O. C est un point de ce cercle tel que $\widehat{AOC}$ soit un angle aigu.
(OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$ et M est un point de $\overset{\frown}{AC}$.
Le point D est le projeté orthogonal de M sur (AB).
La droite (AC) coupe (MD) en H.
Quelle est la nature du triangle AMH ?



24 [AB] est un diamètre d'un cercle (𝒞) de centre O.
C est un point de ce cercle. La tangente en C au cercle (𝒞) coupe (AB) en M.
D est un point de (OA) et la droite perpendiculaire à (AB) passant par D coupe (AC) en E, (CM) en N et (OC) en P.
Dans le cas de la figure ci-dessous :
1) Démontre que : mes $\widehat{COB}$ = mes $\widehat{CNP}$.
Justifie que : mes $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{CNP}$.
2) Démontre que les angles $\widehat{CND}$ et $\widehat{DOC}$ sont supplémentaires. De même pour $\widehat{DEC}$ et $\widehat{DBC}$.



25 Théorème de Nagel
ABC est un triangle. [AI], [BJ] et [CK] sont les trois hauteurs et H est l'orthocentre de ce triangle.
1) Justifie que les points H, I, C et J appartiennent à un même cercle ainsi que les points H, I, B et K.
2) Démontre que (AI) est la bissectrice de $\widehat{JIK}$.
3) Justifie que H est le centre du cercle inscrit dans le triangle IJK.

Les exercices 26 et 27 sont liés

26 [PQ] est un diamètre d'un cercle (𝒞) de rayon r.
A et B sont deux points de (𝒞), H est le projeté orthogonal de P sur (AB).
Démontre que : $PA \times PB = 2r \times PH$.

27 ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans un cercle (𝒞).
Démontre que le produit de la distance de E à (AB) et de la distance de E à (CD) est égal au produit de la distance de E à (BC) et de la distance de E à (AD).

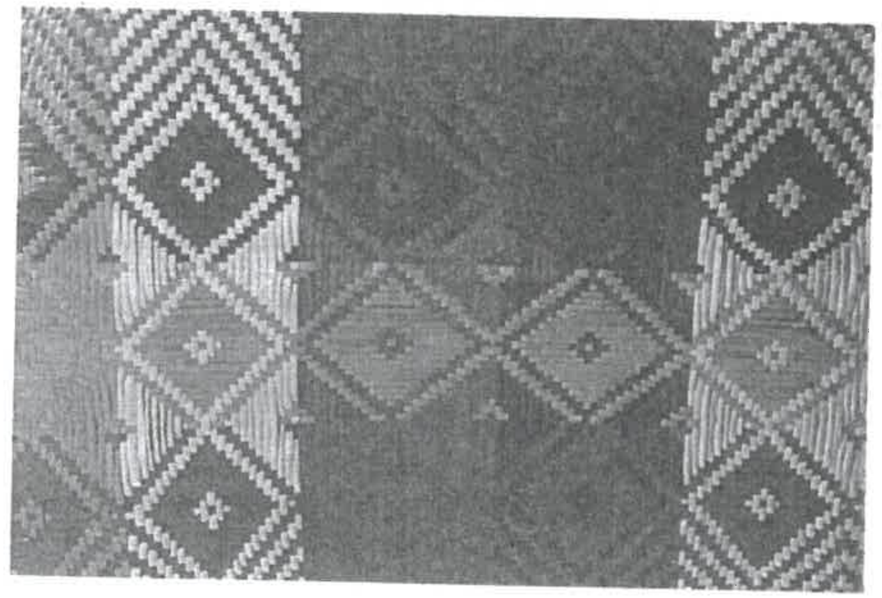
28 ABCDE est un pentagone régulier de côté a inscrit dans un cercle.
Les droites (AB) et (CD) se coupent au point I.
On pose $AC = d$.
1) Calcule la mesure de chacun des angles du triangle BIC et donne la nature du triangle BIC.
2) Démontre que le quadrilatère EBIC est un losange. Justifie que : $IB = IC = d$.
3) Démontre que : $\frac{ID}{IC} = \frac{AD}{BC}$.
Justifie que : $a^2 + ad = d^2$.

29 ABCDE est un pentagone régulier de côté a inscrit dans un cercle. On pose $AC = d$.
Les droites (AB) et (CD), (BC) et (DE), (CD) et (EA), (DE) et (AB), (EA) et (BC) se coupent respectivement aux points I, J, K, L et M.
1) Calcule I J en fonction de a et d.
2) Démontre que le polygone IJKLM est un pentagone régulier.

7

Symétries et translation

Motif de décoration provenant de sacs à mains en raphia à Madagascar.



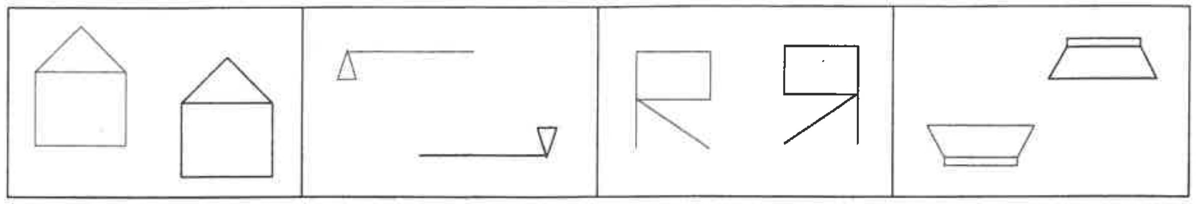
Dans ce motif, on peut trouver des symétries et des translations. Retrouve-les.

SOMMAIRE

1 Symétries, translations et configurations

1.1 RECONNAÎTRE DES SYMÉTRIES ET DES TRANSLATIONS

Chacune des figures ci-dessous illustre une symétrie centrale, une symétrie orthogonale ou une translation.

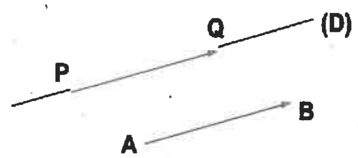


• Dans chacun des cas de figure, donne la nature de cette application.
• Marque le centre de chacune des symétries centrales, trace l'axe de la symétrie orthogonale et représente le vecteur de la translation.

1.2 IMAGES DE FIGURES SIMPLES

Activité 1

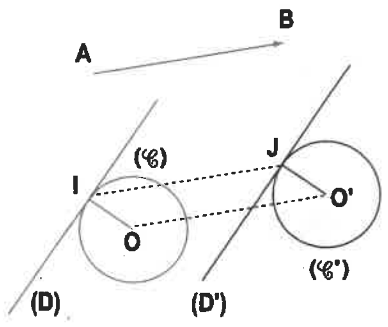
On donne deux points A et B et une droite (D) de vecteur directeur $\vec{AB}$.
Construis l'image (D') de la droite (D) par $t_{\vec{AB}}$, la translation de vecteur $\vec{AB}$.
Tu constates que : (D) = (D').



Pour démontrer que la droite (D) est sa propre image par $t_{\vec{AB}}$, choisis un point P sur (D) ; son image par $t_{\vec{AB}}$ est le point Q tel que : $\vec{PQ} = \vec{AB}$.
• Pourquoi le point Q appartient-il à la fois à (D) et à (D') ?
• Conclus.

Activité 2

On donne deux points A et B et un cercle (𝒞) tangent à une droite (D).
Construis l'image (𝒞') de (𝒞) et l'image (D') de (D) par $t_{\vec{AB}}$, la translation de vecteur $\vec{AB}$.
Que constates-tu ?



$\vec{OO'} = \vec{AB}$

On désigne par O et O' les centres respectifs de (𝒞) et (𝒞'), I le point de contact de (D) et (𝒞) et J l'image de I par $t_{\vec{AB}}$.
Pour démontrer que (𝒞') est tangent en J à (D'), complète le tableau de correspondance suivant par des déductions sur les images.

Je sais que :

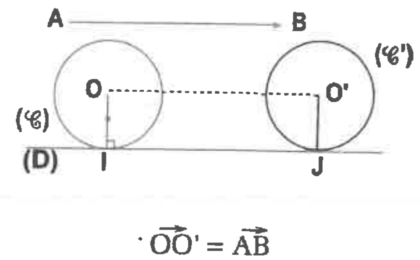
I ∈ (𝒞) et I ∈ (D)
(D) ⊥ (OI)

$t_{\vec{AB}}$	
(D)	(D')
(𝒞)	(𝒞')
I	J
O	O'
(OI)	(O'J)

Donc :
……………………………………
……………………………………
……………………………………

• Conclus.

Activité 3

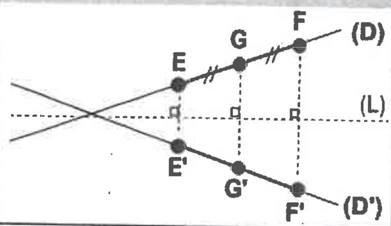
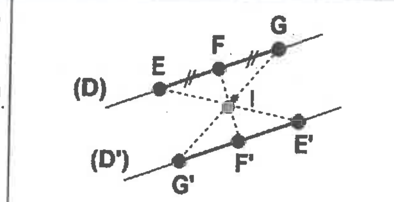
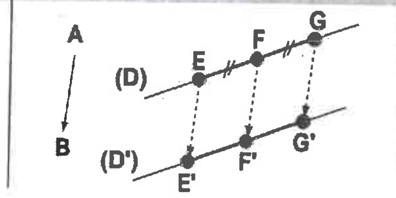
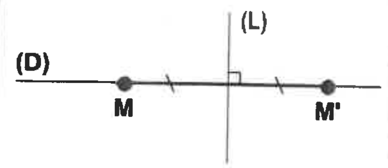
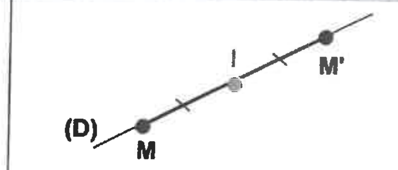
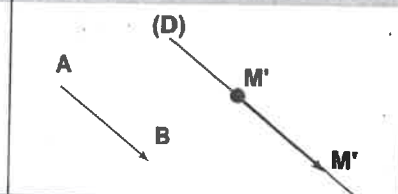
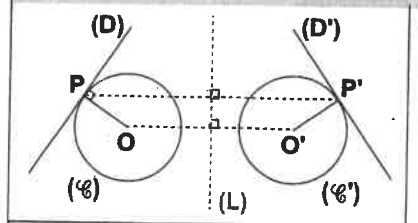
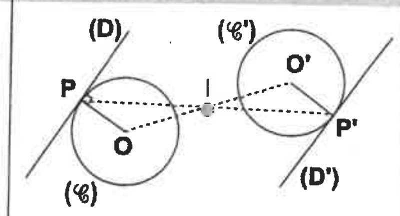
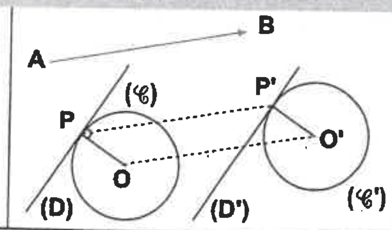


$\vec{OO'} = \vec{AB}$

On reprend l'énoncé de l'activité 2 et on envisage maintenant le cas particulier où $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (D).
• En utilisant le résultat établi dans l'activité 1, que peux-tu dire de (D) et (D') ?
• En utilisant le résultat établi dans l'activité 2, que peux-tu en déduire sur (𝒞') et (D) ?

Le tableau suivant résume et complète les propriétés déjà énoncées dans les classes antérieures.

PROPRIÉTÉS

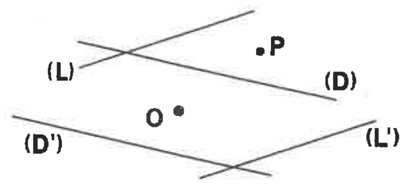
<table>
<tr><th>Par une symétrie orthogonale :</th><th>Par une symétrie centrale :</th><th>Par une translation :</th></tr>
<tr><td colspan="3">Des points alignés ont pour images des points alignés.
Un segment a pour image un segment de même longueur.
Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
Une droite a pour image une droite.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Une droite (D) perpendiculaire à une droite (L) est sa propre image par $S_{(L)}$.</td><td>Une droite passant par un point I est sa propre image par S_I.</td><td>Une droite de vecteur directeur $\vec{AB}$ est sa propre image par $t_{\vec{AB}}$.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
Un cercle a pour image un cercle de même rayon .
Un angle a pour image un angle de même mesure.
Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
Si un point appartient à deux lignes,
alors son image appartient aux images de ces deux lignes.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Une figure a pour image une figure qui lui est superposable</td></tr>
</table>

EXERCICES

1.a ($\mathscr{C}$) est un cercle tangent à une droite (D), O un point du plan.
($\mathscr{C}$') et (D') sont les images respectives de ($\mathscr{C}$) et (D) par la symétrie centrale de centre O.
Démontre que ($\mathscr{C}$') est tangent à (D'). Envisage le cas où O appartient à la droite (D).

1.b ($\mathscr{C}$) est un cercle tangent à une droite (D), (L) est une droite.
($\mathscr{C}$') et (D') sont les images respectives de ($\mathscr{C}$) et (D) par la symétrie orthogonale d'axe (L).
Démontre que ($\mathscr{C}$') est tangent à (D').
Envisage les deux cas suivants :
– (L) est perpendiculaire à (D).
– (L) et (D) désignent la même droite.

1.c On donne les droites (D), (L), (D'), (L') et les points O et P. (D') et (L') sont les images respectives de (D) et (L) par la symétrie centrale S_O.
En utilisant seulement la règle non graduée, construis l'image de P par S_O.



2 Utilisation des symétries et des translations

2.1 DES SYMÉTRIES ET DES TRANSLATIONS POUR DÉMONTRER

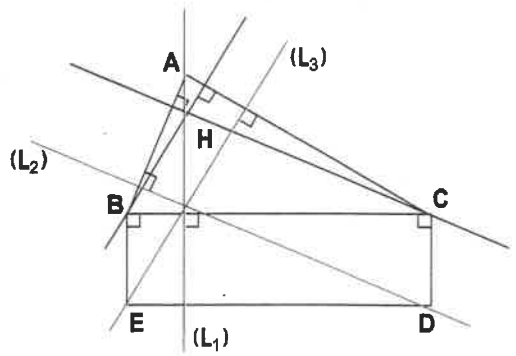
Énoncé 1

ABC est un triangle d'orthocentre H. BCDE est un rectangle.
(L_1) est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A, (L_2) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par D et (L_3) est la droite perpendiculaire à (AC) passant par E.
En utilisant une translation, démontre que les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont concourantes.

Solution

Lecture de l'énoncé

Figure



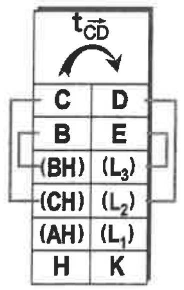
Données
- ABC est un triangle.
- H est l'orthocentre de ABC.
- BCDE est un rectangle.
- A ∈ (L_1) et $(L_1) \perp$ (BC).
- D ∈ (L_2) et $(L_2) \perp$ (AB).
- E ∈ (L_3) et $(L_3) \perp$ (AC).

Conclusion
(L_1), (L_2) et (L_3) sont concourantes.

Recherche d'une démarche

Je sais que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H. La figure me suggère de démontrer que (L_1), (L_2) et (L_3) sont les images de ces trois hauteurs par la translation du vecteur $\vec{CD}$.

Rédaction de la solution



$\vec{HK} = \vec{CD}$

- BCDE est un rectangle. Donc : $\vec{CD} = \vec{BE}$.
Par conséquent, E est l'image de B par $t_{\vec{CD}}$.
- $(L_1) \perp$ (BC) et (CD) $\perp$ (BC). Donc : (L_1) // (CD).
$\vec{CD}$ est un vecteur directeur de la droite (L_1).
Par conséquent, (L_1) est sa propre image par $t_{\vec{CD}}$.
- $(L_2) \perp$ (AB) et (CH) $\perp$ (AB). Donc : (L_2) // (CH).
L'image de (CH) par $t_{\vec{CD}}$ est parallèle à (CH) et passe par D, image de C.
Par conséquent, (L_2) est l'image de (CH) par $t_{\vec{CD}}$.
- On démontre de même que (L_3) est l'image de (BH) par $t_{\vec{CD}}$.
- Les trois droites (AH), (BH) et (CH) sont les hauteurs du triangle ABC. Elles ont un point commun, l'orthocentre H du triangle.
Leurs images (L_1), (L_3) et (L_2) sont donc concourantes en K.

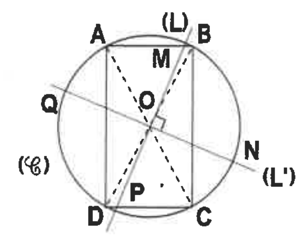
MÉTHODE

Pour démontrer que trois droites sont concourantes,
on peut procéder comme suit :
- soit démontrer que le point commun à deux d'entre elles appartient aussi à la troisième.
- soit démontrer que ces trois droites sont les images, de trois droites concourantes, par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation.

EXERCICES

2.a ABC est un triangle rectangle en B. On désigne par I le milieu de [BC], par J le milieu de [AB] et par H le projeté orthogonal de B sur (AC).
Démontre que (IJ) est la médiatrice de [BH].
En utilisant une symétrie orthogonale, démontre que (HI) $\perp$ (HJ).

2.b On donne un rectangle ABCD inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et deux droites (L) et (L') perpendiculaires en O ;
(L) coupe (AB) en M et (CD) en P ;
(L') coupe (C) en N et Q.
Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?



2.c ABCD est un parallélogramme. La droite parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en I et (AD) en J.
Démontre que : $\vec{DC} = \vec{BI}$ et $\vec{BC} = \vec{DJ}$.
En utilisant une translation, démontre que les triangles BIC et DCJ sont superposables.

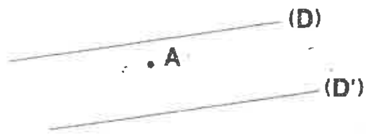
2.2 DES SYMÉTRIES ET DES TRANSLATIONS POUR CONSTRUIRE

Énoncé 1

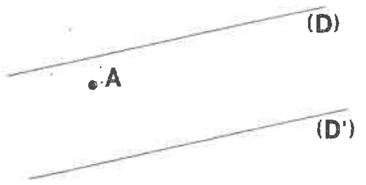
On donne la figure ci-dessous constituée de deux droites parallèles (D) et (D') et d'un point A.

1) Construis un cercle ($\mathscr{C}_1$) tangent aux deux droites (D) et (D').

2) En utilisant une translation, construis un cercle ($\mathscr{C}_2$) passant par A et tangent aux deux droites (D) et (D').



Solution *PREMIÈRE QUESTION*

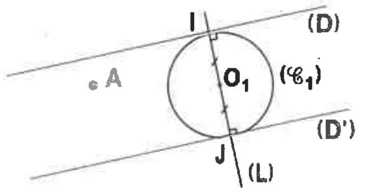


Données
- point A
- (D) // (D')

Objectif
Constuire **un** cercle ($\mathscr{C}$)
- tangent à (D) et (D').

Recherche d'une démarche

Esquisse de la figure recherchée



Analyse de l'esquisse

($\mathscr{C}_1$) est un cercle de centre O_1 tangent aux deux droites (D) et (D') respectivement en I et J.

La droite (IJ) est un diamètre de ($\mathscr{C}_1$), perpendiculaire à (D) et (D').

Rédaction de la solution

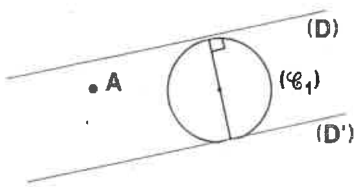
Programme de construction

- Tracer une droite (L) perpendiculaire à (D). (L) coupe (D) en I et (D') en J.
- Construire le cercle ($\mathscr{C}_1$) de diamètre [IJ]. ($\mathscr{C}_1$) est un cercle tangent à (D) et (D').

Justifications

Le centre O_1 de ($\mathscr{C}_1$) est le milieu de [IJ].
On a : (L) $\perp$ (D) et (D) // (D').
Donc : (O_1I) $\perp$ (D) et (O_1J) $\perp$ (D').
(D) et (D') sont les tangentes à ($\mathscr{C}_1$).

Solution *PREMIÈRE QUESTION*



Données
- point A
- (D) // (D')
- ($\mathscr{C}_1$) tangent à (D) et (D')

Objectif
Constuire **le** cercle ($\mathscr{C}_2$)
- tangent à (D) et (D')
- passant par A.

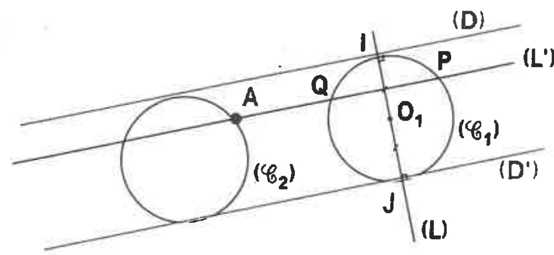
Recherche d'une démarche

Le cercle ($\mathscr{C}_1$) de la première question vérifie toutes les conditions demandées dans la 2e question sauf une, il ne passe pas nécessairement par A.

Je vais donc faire « glisser » ($\mathscr{C}_1$) jusqu'au point A le long de (D) et (D'). Je vais donc construire le cercle ($\mathscr{C}_2$) comme image de ($\mathscr{C}_1$) par une translation de vecteur, un vecteur directeur de (D). (On a deux solutions.)

Rédaction de la solution

Figure



Programme de construction

- Construire comme à la première question un cercle ($\mathscr{C}_1$) tangent à (D) et (D').
- Construire la droite (L') parallèle à (D) passant par A. ; (L') coupe ($\mathscr{C}_1$) en P et Q.
- Construire le cercle ($\mathscr{C}_2$) image de ($\mathscr{C}_1$) par la translation de vecteur $\overrightarrow{PA}$ (ou $\overrightarrow{QA}$).

($\mathscr{C}_2$) est un cercle passant par A et tangent à (D) et (D').

Justification

Je sais que :

P appartient à ($\mathscr{C}_1$)
($\mathscr{C}_1$) est tangent à (D) et (D')

(Voir activité 3 du 1.2).

$t_{\overrightarrow{PA}}$

P	A
($\mathscr{C}_1$)	($\mathscr{C}_2$)
(D)	(D)
(D')	(D')

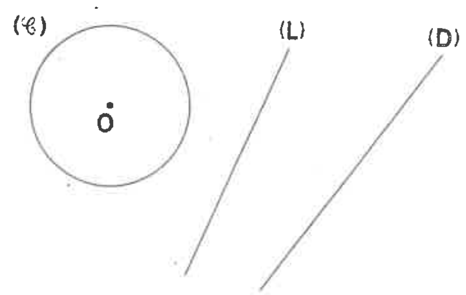
Donc :

A appartient à ($\mathscr{C}_2$)
($\mathscr{C}_2$) est tangent à (D) et (D')

Énoncé 2

On donne la figure constituée par un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de deux droites (D) et (L) non sécantes à ($\mathscr{C}$).
Construis un point M de ($\mathscr{C}$) et un point N de (D) tels que (L) soit la médiatrice de [MN].

Indication
On réalisera une reproduction exacte de cette figure, puis on pourra la compléter de manière à obtenir une figure symétrique par rapport à (L).



Solution

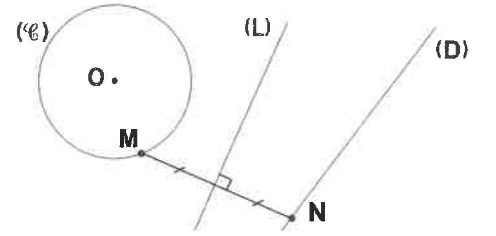
Lecture de l'énoncé

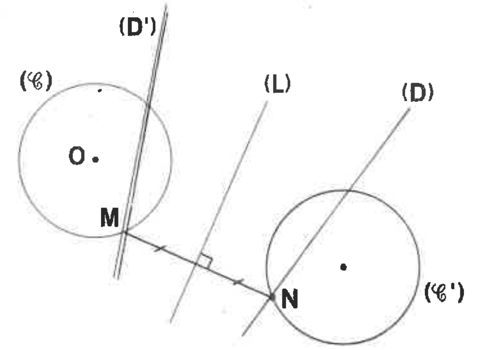
Données
Une figure donnée dans l'énoncé constituée de :
- un cercle ($\mathscr{C}$)
- deux droites (D) et (L) non sécantes à ($\mathscr{C}$)

Objectif
Constuire deux points M et N tels que :
- M $\in$ ($\mathscr{C}$)
- N $\in$ (D)
- (L) médiatrice de [MN]

Recherche d'une démarche

1re Esquisse de la figure recherchée





Analyse de l'esquisse

(L) étant la médiatrice de [MN], M et N sont symétriques par rapport à (L). Il s'agit donc de construire deux points M et N symétriques par rapport à (L), appartenant respectivement à (D) et ($\mathscr{C}$). Je suis donc amené à « symétriser » la figure de manière à ce que (D) et ($\mathscr{C}$) jouent des rôles semblables vis à vis de (L).

Analyse de l'esquisse complétée par $S_{(L)}$

(D') et ($\mathscr{C}$') sont les images respectives de (D) et ($\mathscr{C}$) par $S_{(L)}$ la symétrie orthogonale d'axe (L).

Je sais que :

M ∈ ($\mathscr{C}$),
N ∈ (D),

$S_{(L)}$	
(D)	(D')
($\mathscr{C}$)	($\mathscr{C}$')
M	N
N	M

Donc :

N ∈ ($\mathscr{C}$'),
M ∈ (D').

M est un point commun à ($\mathscr{C}$) et (D').
N est un point commun à (D) et ($\mathscr{C}$').

Rédaction de la solution

Programme de construction

- Construire (D') image de (D) par $S_{(L)}$.
- Marquer M l'un des points d'intersection de (D') et ($\mathscr{C}$).
- Construire le point N image de M par $S_{(L)}$.

M et N répondent au problème posé.

(On obtient deux solutions suivant le choix des points d'intersection de (D') et ($\mathscr{C}$').

Justification

Je sais que :

M ∈ (D'),

$S_{(L)}$	
(D')	(D)
M	N

Donc :

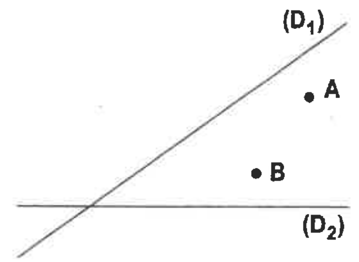
N ∈ (D).

(L) est donc bien la médiatrice de [MN].

EXERCICES

2.d On donne deux droites sécantes (D_1) et (D_2) et deux points A et B n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2).
Construis deux points C et D appartenant respectivement à (D_1) et (D_2) tels que ADBC soit un parallélogramme.
On pourra utiliser la symétrie centrale de centre le milieu O de [AB] et compléter le tableau ci-contre.

S_O	
O	
A	
B	
C	
D	
(D_1)	
(D_2)	



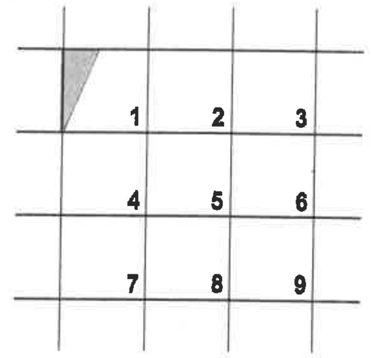
2.e On donne deux droites sécantes (D_1) et (D_2) et deux points P et Q.
Construis un parallélogramme PQST tel que S et T appartiennent respectivement à (D_1) et (D_2).
On pourra utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{QP}$ et compléter le tableau ci-contre.

$t_{\overrightarrow{QP}}$	
Q	
S	
(D_1)	

3 Symétries et translations successives

Pavage par symétries successives

On considère un pavage du plan à l'aide de carreaux. Un motif en forme de fanion est dessiné sur le carreau n° 1.



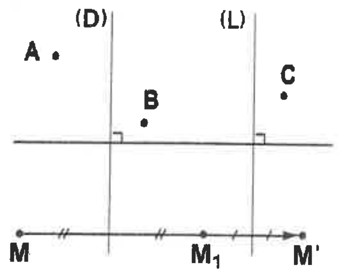
- De proche en proche, dessine ce motif dans chacun des carreaux en respectant la règle suivante :
Lorsque deux carreaux ont un côté commun, leurs motifs sont symétriques par rapport à ce côté commun.
- Trouve une application qui donne le carreau n° 2 pour image du carreau n° 1.
- Trouve une application qui donne le carreau n° 3 pour image du carreau n° 1.
- Trouve une application qui donne le carreau n° 5 pour image du carreau n° 1.

Symétries orthogonales successives d'axes parallèles ou perpendiculaires

On donne deux droites, (D) et (L), trois points A, B et C. M est un point du plan.
- Construis les points A_1, B_1 et C_1, images respectives de A, B et C par $S_{(D)}$, symétrie orthogonale d'axe (D).
- Construis les points A', B' et C', images respectives de A_1, B_1 et C_1 par $S_{(L)}$, symétrie orthogonale d'axe (L).

On dit que A', B' et C' sont les images respectives de A, B et C par $S_{(D)}$ **suivie de** $S_{(L)}$.

Les constructions suivantes sont celles de cas particuliers d'axes parallèles ou perpendiculaires pour les symétries.

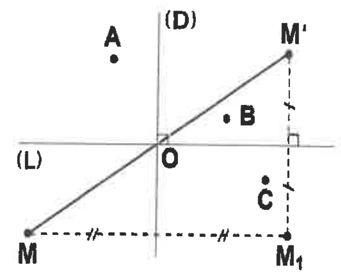


(D)//(L)

$S_{(D)}$	
A	A_1
B	B_1
C	C_1
M	M_1

$S_{(D)}$	
A_1	A'
B_1	B'
C_1	C'
M_1	M'

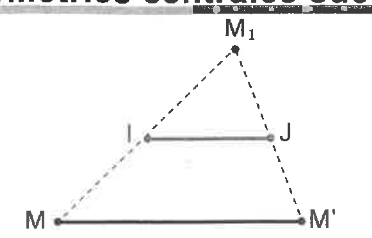
$M \xrightarrow{S_{(D)}} M_1 \xrightarrow{S_{(L)}} M'$

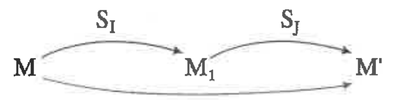


(D)⊥(L)

- Représente en rouge les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
Que constates-tu ?
- Trace en rouge les segments [AA'], [BB'] et [CC'].
Que constates-tu ?
- Dans chacun des cas, trouve une application qui, à tout point M associe son image M' par $S_{(D)}$ **suivie de** $S_{(L)}$.

Symetries centrales successives

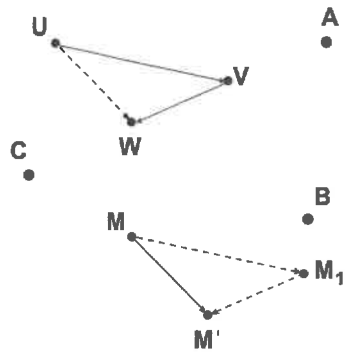


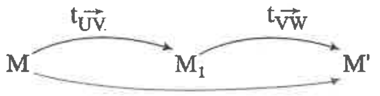


On donne deux points I et J. M est un point du plan.
M_1 est l'image de M par S_I, la symétrie par rapport à I.
M' est l'image de M_1 par S_J, la symétrie par rapport à J.

- Démontre que : $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.
- Trouve une application qui, à tout point M associe son image M' par S_I **suivie** de S_J.

Translations successives





$t_{\overrightarrow{UV}}$	
A	A_1
B	B_1
C	C_1
M	M_1

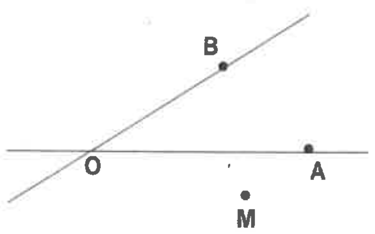
$t_{\overrightarrow{VW}}$	
A_1	A'
B_1	B'
C_1	C'
M_1	M'

On donne deux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{VW}$, trois points A, B et C. M est un point du plan.

- Construis A_1, B_1 et C_1, images respectives de A, B et C par $t_{\overrightarrow{UV}}$, translation de vecteur $\overrightarrow{UV}$.
- Construis A', B', et C', images respectives de A_1, B_1 et C_1 par $t_{\overrightarrow{VW}}$, translation de vecteur $\overrightarrow{VW}$.
- Représente en rouge $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
  Que constates-tu ?
- Démontre que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{UW}$.
- Trouve une application qui à tout point M associe son image M' par $t_{\overrightarrow{UV}}$ **suivie de** $t_{\overrightarrow{VW}}$.

EXERCICES

3.a Sur la figure ci-contre, mes $\widehat{AOB} = 30°$.
Construis l'image M_1 de M par la symétrie orthogonale d'axe (OA).
Construis l'image M' de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe (OB).
Que peux-tu dire des distances OM et O'M ?
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$.
Exprime mes $\widehat{MOM'}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.



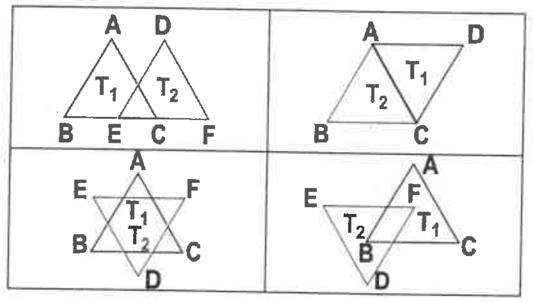
3.b On donne une droite (D) et un point O appartenant à cette droite.
Construis l'image M_1 d'un point M par la symétrie centrale de centre O.
Construis l'image M' de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe (D).
Démontre que la droite perpendiculaire en O à la droite (D) est la médiatrice de [MM'].
Trouve une application qui, à chaque point M associe le point M' ainsi obtenu.

EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 SYMÉTRIES, TRANSLATIONS ET CONFIGURATIONS

1 Dans chacune des configurations ci-dessous, les triangles équilatéraux T_1 et T_2 sont superposables. Reproduis les figures et, pour chacune d'elles, trouve des symétries ou des translations.
a) qui donnent le triangle T_2 pour image du triangle T_1 ;
b) qui donnent le triangle T_1 pour image du triangle T_2 ;
c) qui donnent le triangle T_1 pour image du triangle T_1 et le triangle T_2 pour image du triangle T_2.

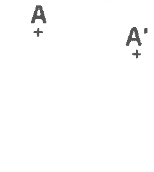


2 (D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles. Une droite (L) qui n'est pas perpendiculaire à (D_1) coupe respectivement (D_1) au point A et (D_2) au point B.
a) Construis l'image (L_1) de (L) par la symétrie orthogonale $S_{(D_1)}$ et l'image (L_2) de (L) par la symétrie orthogonale $S_{(D_2)}$.
b) Démontre que : $(L_1) \,//\, (L_2)$.
c) Démontre que (L_2) est l'image de (L_1) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

3 ABC est un triangle. Le point B' est le symétrique de B par rapport à (AC) et le point C' est le symétrique de C par rapport à (AB).
Démontre que : BC' = B'C.

4 ABC est un triangle. Les points A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [AC]. M est un point intérieur au triangle ABC.
Construis le point D symétrique de M par rapport à A' et le point E symétrique de M par rapport à B'.
Démontre que le quadrilatère ABDE est un parallélogramme.

5 Sur la figure ci-dessous, le point A' est l'image de A par la symétrie orthogonale $S_{(D)}$.
En utilisant seulement le compas, construis le point B', image de B par cette symétrie orthogonale. Explique ta construction.



6 L'unité de longueur est le cm.
Construis à la règle et au compas, un parallélogramme ABCD tel que :
AB = 6, AC = 8 et BD = 5.

3 SYMÉTRIES, ET TRANSLATIONS SUCCESSIVES

7 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle (𝒞) de centre O.
On désigne par,
f : $t_{\overrightarrow{AB}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{CD}}$.
g : $t_{\overrightarrow{OA}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{CD}}$.
Complète les tableaux de correspondance ci-contre.

f	
O	
A	
B	
F	

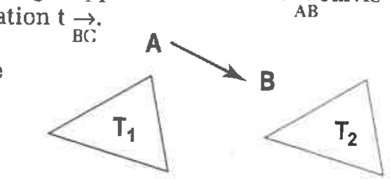
g	
O	
B	
C	
D	

8 ABCD est un carré de centre O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
On désigne par,
f : $S_{(AC)}$ suivie de $S_{(BD)}$
g : $S_{(AC)}$ suivie de $S_{(IJ)}$.
Complète les tableaux de correspondance ci-contre.

f	
O	.
A	
B	
C	
D	

g	
O	
D	
L	
K	

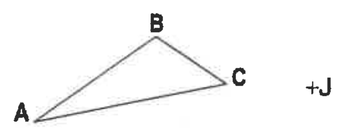
9 Sur la figure ci-dessous, le triangle T_2 est l'image du triangle T_1 par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ suivie de la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$.
Construis le vecteur $\overrightarrow{BC}$.



EXERCICES

APPROFONDISSEMENT

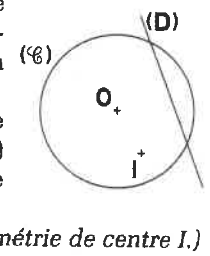
10 ABC est un triangle. I et J sont deux points. Construis les triangles A'B'C' et A"B"C", images respectives du triangle ABC par les symétries centrales S_I et S_J.
Démontre que le triangle A"B"C" est l'image du triangle A'B'C' par une translation dont tu donneras le vecteur.



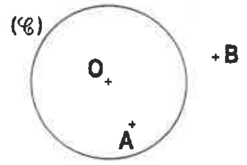
11 ABCD est un quadrilatère. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [BC].
Les points M et N sont les symétriques respectifs de C et B par rapport à A.
Les points P et Q sont les symétriques respectifs de B et C par rapport à D.
Les droites (MP) et (NQ) se coupent en K.
a) Démontre que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
b) Démontre que : (KA) // (DJ).
c) Démontre que K est l'image de J par la symétrie centrale S_J.

12 ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
Démontre que la droite (OD) est la médiatrice des segments [AB] et [CE].
Quels sont les cinq axes de symétrie d'un pentagone régulier ?

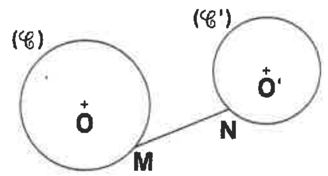
13 On donne un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O, une droite (D) sécante à ($\mathscr{C}$) et un point I intérieur à ($\mathscr{C}$).
Construis un point A de ($\mathscr{C}$) et un point B de (D) tels que I soit le milieu de [AB].
(Tu pourras utiliser la symétrie de centre I.)



14 On donne un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O, un point A intérieur à ($\mathscr{C}$) et un point B extérieur à ($\mathscr{C}$).
Construis les points C et D appartenant à ($\mathscr{C}$) tels que ACBD soit un parallélogramme.
(Tu pourras utiliser une symétrie centrale.)

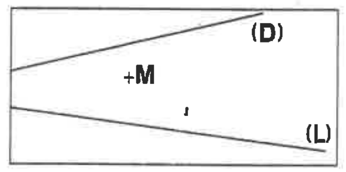


15 On donne un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O, un cercle ($\mathscr{C}$') de centre O', un segment [MN] tel que M appartient à ($\mathscr{C}$) et N appartient à ($\mathscr{C}$').
Construis un point P appartenant à ($\mathscr{C}$) et un point Q appartenant à ($\mathscr{C}$') tels que le quadrilatère MNQP soit un parallélogramme *(Tu pourras utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.)*

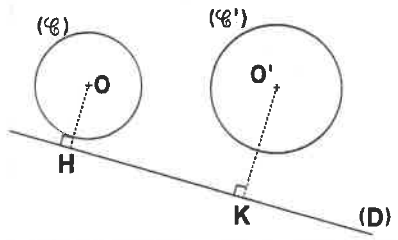


RECHERCHE

16 La figure ci-dessous représente deux droites (D) et (L) sécantes en un point P situé hors de la page sur laquelle elles sont tracées.
Énonce un programme de construction de la droite (MP).
(Tu pourras utiliser la symétrie de centre M.)

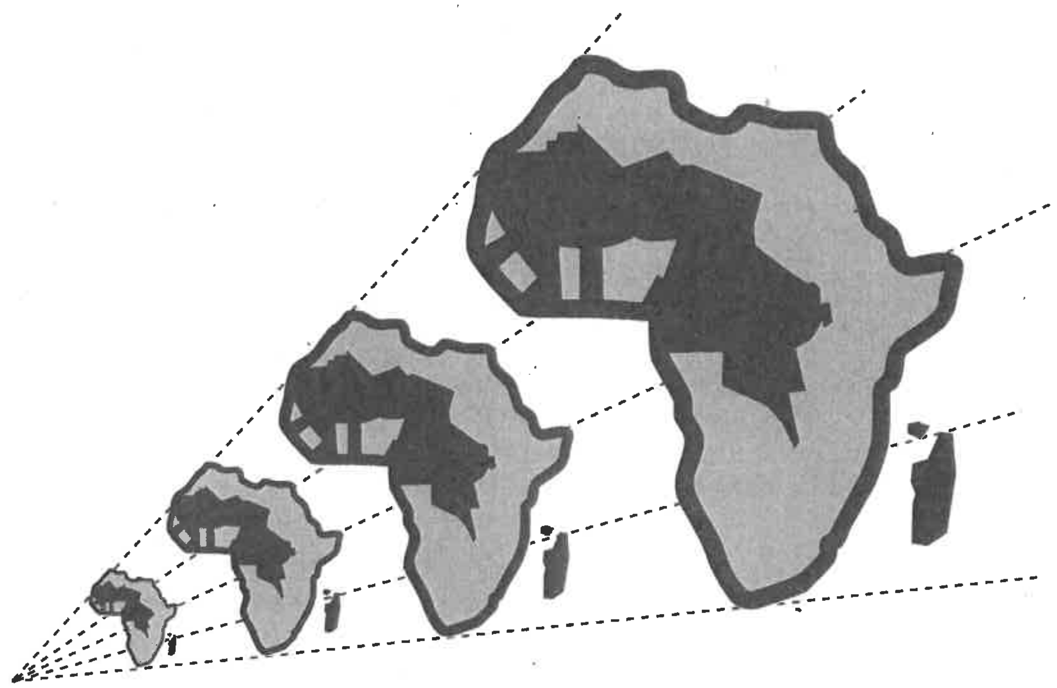


17 ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') sont deux cercles de centres respectifs O et O'. (D) est une droite.
Les points H et K sont respectivement les projetés orthogonaux des points O et O' sur (D).
Construis une droite (D') telle que :
– (D') est parallèle à (D) ;
– (D') coupe ($\mathscr{C}$) aux points A et B ;
– (D') coupe ($\mathscr{C}$') aux points A' et B' ;
– AB = A'B'.
(Tu pourras utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{HK}$.)



8

Rotation et homothétie

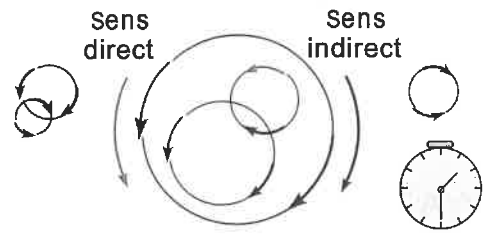


SOMMAIRE

1 Rotations

1.1 SENS DE DÉPLACEMENT SUR LES CERCLES DU PLAN

Sens direct - Sens indirect



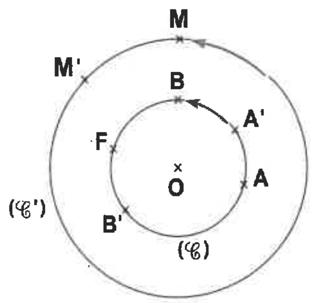
Dans le plan, on distingue deux sens de déplacement sur chaque cercle :

– l'un est le sens des aiguilles d'une montre, généralement appelé **sens indirect**

– l'autre est le sens inverse des aiguilles d'une montre, généralement appelé **sens direct.**

Sens de déplacement sur les cercles

$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de même centre O ; A et B sont deux points non diamétralement opposés du cercle $(\mathscr{C})$.



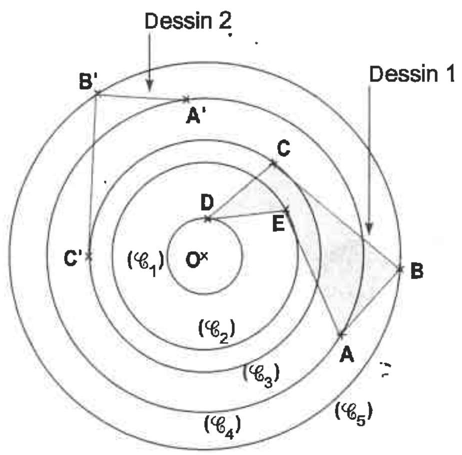
Nous appellerons **sens de déplacement** de A vers B sur $(\mathscr{C})$, le sens de déplacement de A vers B sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Sur $(\mathscr{C})$, le sens de déplacement de A vers A' est le sens direct, le sens de déplacement de B vers B' est celui de A vers A', le sens de déplacement de E vers F est le sens opposé à celui de A vers A'.

Sur $(\mathscr{C}')$, le sens de déplacement de M vers M' est le sens direct; c'est celui de A vers A' sur $(\mathscr{C})$.

1.2 ROTATION

Activité



À l'aide du compas et de la règle, on veut reproduire le dessin 1 tramé en couleur, de façon à ce que les points A, B, C, D et E correspondent respectivement aux points A', B', C', D' et E'. Les points A', B' et C' du dessin 2 sont donnés.

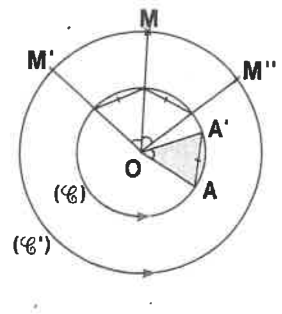
• Vérifie que les triangles ABC et A'B'C' sont superposables. Construis les points D' et E'; explique ta méthode.

• Sur un papier calque, reproduis le dessin 1 et le centre O des différents cercles.

Avec la pointe sèche du compas, fixe le point O du calque sur le point O de la page et fais tourner le calque de sorte que le point A du calque vienne en superposition avec le point A' du dessin 2. Que constates-tu ?

• Vérifie que :
– OA = OA' ; OB = OB' ; OC = OC' ; OD = OD' et OE = OE',
– les angles $\widehat{AOA'}$; $\widehat{BOB'}$; $\widehat{COC'}$; $\widehat{DOD'}$ et $\widehat{EOE'}$ ont la même mesure,
– sur chacun des cercles, les sens de déplacements de A vers A', de B vers B', de C vers C', de D vers D' et de E vers E' sont les mêmes.

Presentation



r	
O	O
A	A'
M	M'

On donne un triangle OAA', isocèle en O.
$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O, de rayon OA.
On considère un point M, distinct de O.
$(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre O, de rayon OM.
On sait qu'il existe deux points M' et M'' de $(\mathscr{C}')$ tels que :

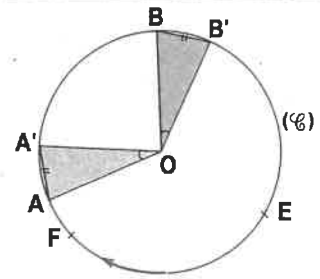
$$\text{mes}\,\widehat{MOM'} = \text{mes}\,\widehat{MOM''} = \text{mes}\,\widehat{AOA'}$$

On désigne par M' celui pour lequel le sens de déplacement sur $(\mathscr{C}')$ de M vers M' est celui du déplacement sur $(\mathscr{C})$ de A vers A'.

Par cette construction, à chaque point M distinct de O, on associe le point M' ; au point O, on convient d'associer le point O lui-même.
On définit ainsi une application du plan dans le plan qui est déterminée par le triangle isocèle OAA' ; c'est la **rotation *r* de centre** O **qui applique** A **sur** A'. M' est l'image de M par cette rotation.

1.3 IMAGE D'UN POINT

Activité 1



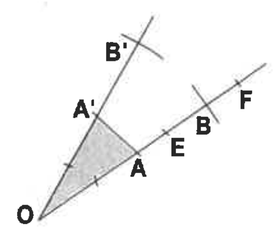
r	O	A	B	E	F
	O	A'	B'	E'	F'

On donne le triangle OAA' isocèle en O.
On désigne par *r* la rotation de centre O qui applique A sur A'.
$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon OA.

Pour construire l'image B' d'un point B de $(\mathscr{C})$, par *r*, on utilise une méthode basée sur les remarques suivantes :
– B' ∈ $(\mathscr{C})$ et mes $\widehat{BOB'}$ = mes $\widehat{AOA'}$
– sur $(\mathscr{C})$, le sens de déplacement de B vers B' est celui de A vers A'.

• Construis l'image par *r* de chacun des points E et F de $(\mathscr{C})$.

Activité 2



r	O	A	B	E	F
	O	A'	B'	E'	F'

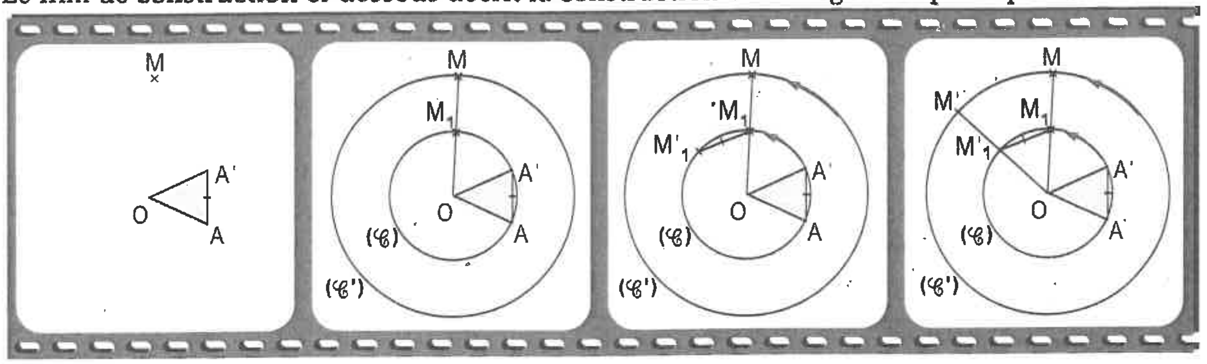
On donne le triangle OAA' isocèle en O.
On désigne par r la rotation de centre O qui applique A sur A'.
Pour construire l'image B' d'un point B de [OA), par *r*, on utilise une méthode basée sur les remarques suivantes :
– B' ∈ [OA') et OB' = OB

$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon OA, $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre O et de rayon OB, on constate alors que le sens de déplacement de B vers B' sur $(\mathscr{C}')$ est celui de A vers A' sur $(\mathscr{C})$.

• Construis l'image par *r* de chacun des points E et F de [OA).

Film de construction

On donne le triangle OAA' isocèle en O.
On désigne par r la rotation de centre O qui applique A sur A'.
Le film de construction ci-dessous décrit la construction de l'image d'un point par r.



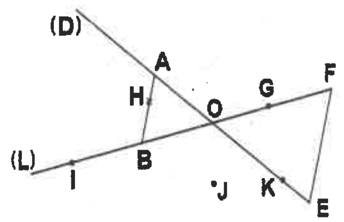
MÉTHODE

Pour construire l'image d'un point M par la rotation de centre O qui applique A sur A', OAA' étant un triangle isocèle en O,

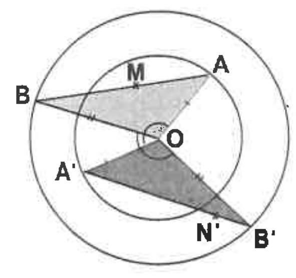
on peut procéder comme suit :
- Tracer le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O qui passe par A (et A').
- Tracer le cercle ($\mathscr{C}$') de centre O qui passe par M .
- Noter sur ($\mathscr{C}$) et sur ($\mathscr{C}$') le sens de déplacement de A vers A'.
- Placer sur ($\mathscr{C}$') le point M' tel que :
  - mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{AOA'}$
  - le sens de déplacement sur ($\mathscr{C}$') de M vers M' est celui de A vers A' sur ($\mathscr{C}$).

EXERCICE

1.a Les droites (D) et (L) se coupent en O.
Les points A et E de (D) et les points B et F de (L) sont tels que les triangles AOB et EOF sont isocèles en O.
Construis les images des différents points de la figure par :
- la rotation r de centre O qui applique A sur B,
- la rotation r' de centre O qui applique F sur E.



1.4 IMAGE D'UN SEGMENT



OAA' est un triangle isocèle en O, B un point du plan. B' est l'image de B par la rotation r de centre O qui applique A sur A'.

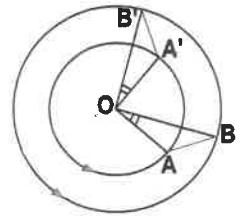
- On veut vérifier, à l'aide d'instruments, que [A'B'] est l'image de [AB] par r. Pour cela,
  - marque un point M sur [AB] et vérifie que l'image M' de M appartient à [A'B'].
  - marque un point N' sur [A'B'] et vérifie que N' est l'image par r d'un point N de [AB].
- On veut démontrer que : AB = A'B'.

Pour cela, démontre que les triangles OAB et OA'B' sont superposables.

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

L'image d'un segment par une rotation est un segment de même longueur.



r	
O	O
A	A'
B	B'
[AB]	[A'B']

AB = A'B'

EXERCICES

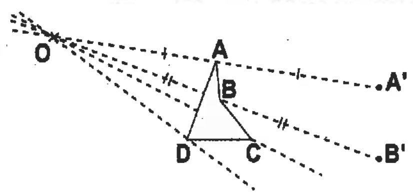
1.b On donne le triangle OAB rectangle et isocèle en O.
On désigne par r la rotation de centre O qui applique A sur B. Construis successivement le point C image de B par r et le point D image de C par r.
Quelle est l'image de D par r ?
Que peux tu dire du quadrilatère ABCD ?

1.c OAA' est un triangle isocèle en O, ABC est un triangle rectangle en A et r la rotation de centre O appliquant A sur A'. On désigne par B' et C' les images respectives de B et C par r.
Démontre que A'B'C' est un triangle rectangle en A'.
On pourra utiliser les propriétés de Pythagore.

2 Homothéties

2.1 DÉFINITION

Activité



A et B sont les milieux respectifs de [OA'] et [OB'].
- Exprime $\overrightarrow{OA'}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, puis $\overrightarrow{OB'}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$.
- h est l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$.

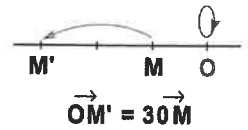
Construis les points C' et D', images respectives de C et D par h.

DÉFINITION

O est un point du plan et k un nombre réel différent de 0.
On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application du plan dans le plan qui à chaque point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.

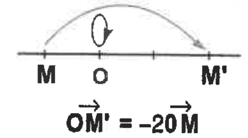
h est l'homothétie de centre O et de rapport 3.

h	
O	O
M	M'



h' est l'homothétie de centre O et de rapport –2.

h'	
O	O
M	M'



Remarques
Si O est le centre d'une homothétie h, alors $h(O) = O$
Le centre de l'homothétie, un point et son image sont alignés.

EXERCICE

2.a Traduis par une égalité vectorielle la phrase suivante :
« B est l'image du point A par l'homothétie de centre I et de rapport 0,5 ».
M, N et P sont des points tels que : $\overrightarrow{PN} = 1{,}5\,\overrightarrow{PM}$.
Traduis cette égalité utilisant les mots « image » et « homothétie ».

2.2 PROPRIÉTÉS

Image d'un point

Construis dans chaque cas l'image M' de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.

$k = 2$ $\qquad k = 1{,}5$ $\qquad k = \frac{2}{3}$

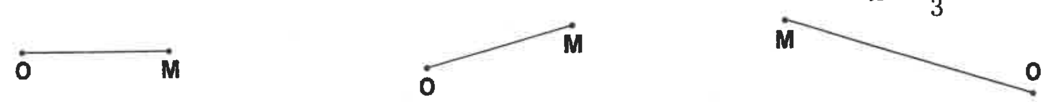
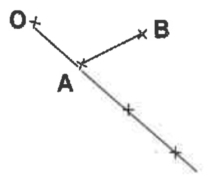


Image d'un segment, d'une droite

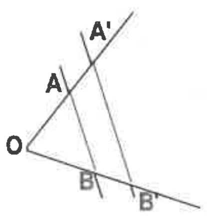


On donne le point O et le segment [AB].
h est l'homothétie de centre O et de rapport 3.
• Construis A' et B', images respectives de A et B par h.
• Exprime $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
– Quelle est la position relative des droites (AB) et (A'B') ?
– Compare les distances AB et A'B'.

• On veut démontrer que [A'B'] est l'image de [AB] par h. Pour cela,
– marque un point M sur [AB] et démontre que son image M' par h est sur [A'B'].
(on pourra justifier que A'M' = 3AM, M'B' = 3MB et A'M' + M'B' = A'B').
– marque un point N' sur [A'B'] et démontre que N' est l'image par **h** d'un point N de [AB].

PROPRIÉTÉ

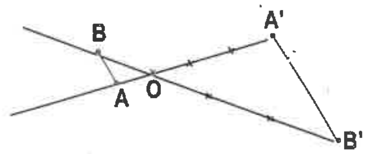
Par une homothétie de rapport k,
- **une droite a pour image une droite qui lui est parallèle,**
- **le segment [AB] a pour image le segment [A'B'] de longueur $|k|$ AB.**



$\overrightarrow{OA'} = 1{,}5\,\overrightarrow{OA}$

h	
A	A'
B	B'
[AB]	[A'B']
[AB]	[A'B']

$\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$

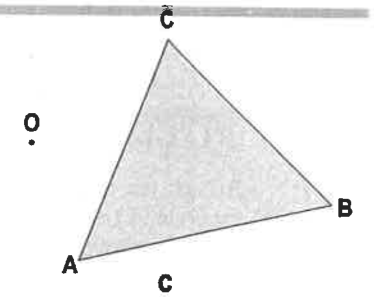


$\overrightarrow{OA'} = -3\,\overrightarrow{OA}$

2.3 IMAGE DE FIGURES SIMPLES

Réduction d'un triangle

O est un point du plan, ABC est un triangle. Construis l'image du triangle ABC par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$.

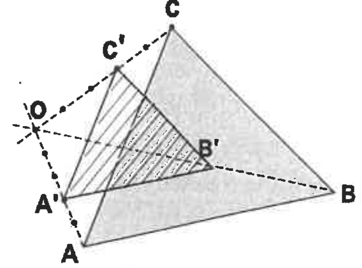


$A'B' = \frac{3}{5}AB$; $A'C' = \frac{3}{5}AC$ et $B'C' = \frac{3}{5}BC$.
L'image par l'homothétie h du triangle ABC est le triangle A'B'C'.

Le triangle A'B'C' est donc une reproduction à l'échelle $\frac{3}{5}$ du triangle ABC.

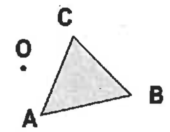
• Quel est le rapport des aires des triangles ABC et A'B'C' ?

h	
A	A'
B	B'
C	C'



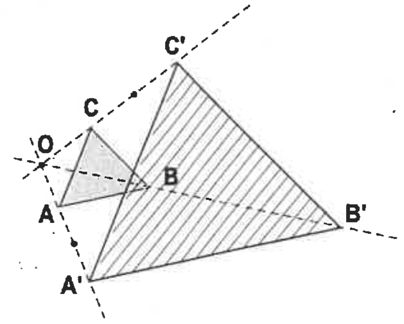
Agrandissement d'un triangle

O est un point du plan, ABC est un triangle. Construis l'image du triangle ABC par l'homothétie h de centre O et de rapport 3.



A'B' = 3 AB ; A'C' = 3 AC et B'C' = 3 BC.
L'image par l'homothétie h du triangle ABC est le triangle A'B'C'.
Le triangle A'B'C' est donc une reproduction à l'échelle 3 du triangle ABC.
• Quel est le rapport des aires des triangles ABC et A'B'C' ?

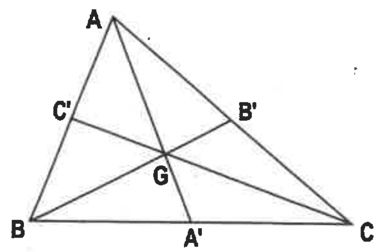
h	
A	A'
B	B'
C	C'



EXERCICES

2.b ABC est un triangle.
Construis l'image de ce triangle par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

2.c A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle ABC. G est le centre de gravité de ce triangle. Quelle est l'image du triangle ABC par l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$?
Construis les images par h de chacune des hauteurs de ce triangle. Quelle est l'image par h de l'orthocentre de ce triangle ?



EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 ROTATIONS

1 ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (𝒞) de centre O. On désigne par r la rotation de centre O qui applique A sur B.
a) Quelles sont les images par r de chacun des points O, B et C ?
b) Quelles sont les images respectives de chacun des triangles ABC et OBC par r ?

2 ABC est un triangle équilatéral.
r est la rotation de centre A appliquant B sur C.
a) Construis, au compas uniquement, le point D image de C par r, puis le point E image de D par r.
b) Quelle est la nature de chacun des quadrilatères ABCD et BCDE ?

3 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O.
On désigne par r_1 la rotation de centre O qui applique A sur B et r_2 la rotation de centre O qui applique A sur E.
Fais une figure.
Complète les deux tableaux de correspondance ci-contre.

r_1	
O	
A	
B	
C	
D	
E	
F	

r_2	
O	
A	
B	
C	
D	
E	
F	

4 ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (𝒞) de centre O. La droite (D) est la médiatrice de [AB]. (D) recoupe (𝒞) au point E.
a) Construis l'image EFG du triangle ABC par la rotation de centre O qui applique A sur E.
Quelle est la nature du triangle EFG ?
b) Quelle est la nature du polygone AEBFCG ?

5 ABCD est un carré inscrit dans un cercle (𝒞) de centre O. La droite (L) est la médiatrice de [AB] et (L) coupe $\overset{\frown}{AB}$ au point E.
a) Construis l'image EFGH du carré ABCD par la rotation de centre O qui applique A sur E.
b) Donne la nature du polygone AEBFCGDH.

6 MNPQ est un rectangle de centre I.
On désigne par r la rotation de centre I qui applique M sur N.
a) Quelles sont les images respectives des points I et P par r ?
b) Construis les images respectives R et S des points N et Q par r.
c) Quelle est l'image du rectangle MNPQ par la rotation r ? Quelle est sa nature ?

2 HOMOTHÉTIES

7 ABC est un triangle. Les points A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [AC]. Les droites (AA') et (BB') se coupent au point G.
a) Trouve l'image de A' par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ et l'image de G par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
b) En utilisant seulement la règle, construis le point C', image de C par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

8 ABCD est un carré de centre O.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Les points M et N sont les milieux respectifs de [AI] et [AL].
a) Trouve l'image de B par l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$ et l'image de A par l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{3}{4}$.
b) Quelle est l'image du triangle BIJ par l'homothétie de centre B et de rapport 2 ?
c) Le triangle AMN est l'image du triangle ABD par une homothétie de centre A.
Quel est le rapport de cette homothétie ?

9 ABC est un triangle équilatéral de côté 3 cm. On désigne par h, l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{4}{3}$ et par AB'C', l'image de ABC par h.
a) Démontre que le triangle AB'C' est équilatéral.
b) Calcule l'aire du triangle AB'C'.

9

Pyramides et Cônes

L'ancêtre des pyramides en Égypte est la pyramide à degrés du pharaon Djoser, construite vers 3 000 avant J.-C.
D'après le professeur Niangoran Boua on trouve en Côte d'Ivoire chez le roi des Indénié une pyramide à quatre degrés et dans la salle de réunions de Nana Koffi Yéboa, roi des Abron, une pyramide à deux degrés.

Voici ce que dit Nana Koffi Yéboa sur le rôle d'une telle pyramide dans le royaume :
« La pyramide symbolise le pays ; les degrés de cette construction représentent les clans constitutifs sur lesquels repose le royaume. »

L'Univers Akan des Poids à peser l'or, Éd. N.E.I.

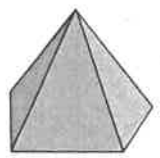
SOMMAIRE

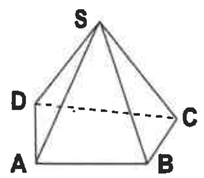
1 Pyramides et cônes

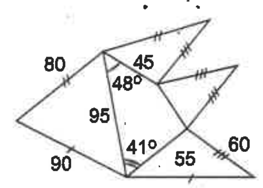
1.1 PYRAMIDES

Présentation

Ce solide est une pyramide. SABCD est sa représentation Esquisse d'un patron.

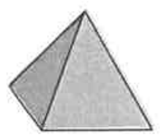




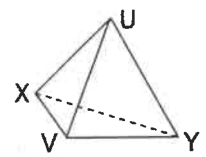


Le point S est **le sommet de la pyramide.**
Les segments [SA], [SB], ..., [CD], [DA] sont les **arêtes** de la pyramide.
Les triangles SAB, SBC, SCD et SDA sont **les faces latérales** de la pyramide.
Le polygone ABCD est **la base** de la pyramide.

Exemple

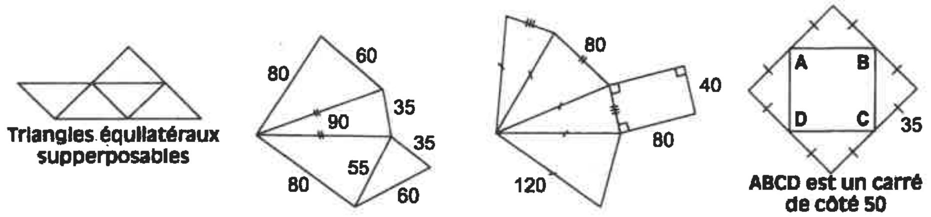


Dans une pyramide à base triangulaire, chaque face peut être considérée comme la base de la pyramide, chaque sommet peut être considéré comme le sommet de la pyramide.



EXERCICE

1.a **L'unité est le mm. Un des dessins suivants ne peut visiblement pas être un patron de pyramide. Lequel est-ce ? À partir des autres esquisses, essaie de réaliser une pyramide. Précise ensuite quels dessins sont réellement des patrons de pyramide.**



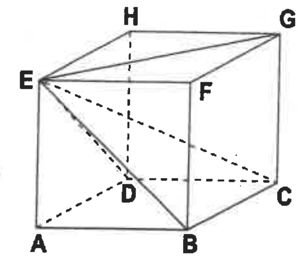
1.2 HAUTEUR ET VOLUME D'UNE PYRAMIDE

DEFINITION

On appelle hauteur d'une pyramide la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

La hauteur d'une pyramide de sommet S perce le plan de la base au point H. Le mot hauteur désignera, selon le contexte, la droite (SH), le segment [SH] ou la distance SH.

Volume d'une pyramide



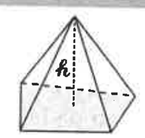
- Observe le cube ABCDEFGH.
- Désigne trois pyramides à base carrées, telles que leur sommet soit le point E et leur base soit une face du cube, précise leur hauteur.

Il semble que ces trois pyramides aient le même volume et constituent le cube. Il est possible de le vérifier. Pour cela :
– dessine le patron de chacune de ces pyramides ;
(il s'agit, en fait, de trois patrons de la même pyramide).
– réalise ces pyramides et assemble-les pour reconstituer le cube.

$\mathcal{B}$ désignant l'aire de la base, et h la hauteur de chacune de ces pyramides,
– exprime le volume du cube, en fonction de $\mathcal{B}$ et de h ;
– exprime le volume de chaque pyramide, en fonction de $\mathcal{B}$ et de h.

On admet la formule suivante :

FORMULE DU VOLUME D'UNE PYRAMIDE

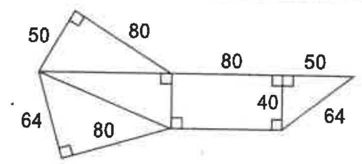


$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}\,h$$

$\mathcal{V}$: volume
$\mathcal{B}$: aire de la base
h : hauteur de la pyramide

EXERCICE

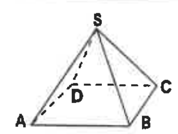
1.b Calcule l'aire latérale, l'aire totale et le volume de la pyramide à base rectangulaire dont voici l'esquisse d'un patron.



1.3 PYRAMIDES RÉGULIÈRES

DÉFINITION

On dit qu'une pyramide est régulière lorsque :
– sa base est un polygone régulier,
– ses faces latérales sont des triangles isocèles.

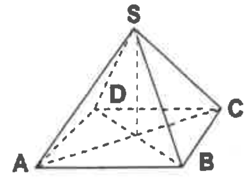


ABCD est un carré.
SA = SB = SC = SD

Remarque
Les faces latérales d'une pyramide régulière sont superposables.

Exemple de détermination de la hauteur d'une pyramide régulière

SABCD est une pyramide régulière qui a pour base le carré ABCD de centre I.
L'unité de longueur est le cm, AB = 4 et IS = 5.
1) Quelle est la nature des triangles ACS et BDS ?
2) Dessine en dimensions réelles la base ABCD et les figures des plans (ACS) et (ABS).
3) Démontre que (IS) est la hauteur de la pyramide SABCD.



Esquisse

1) Nature des triangles ACS et BDS.
ACS et BDS sont isocèles en S, en effet la pyramide SABCD étant régulière de sommet S, on a : SA = SB = SC = SD.

2) Les dessins ci-dessous sont réalisés à l'échelle $\frac{1}{2}$.

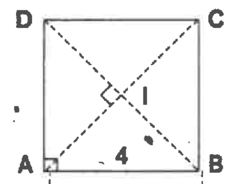


Figure 1
Dessin en dimensions réelles de la base ABCD.
Connaissant AB, on peut construire le segment [AC].

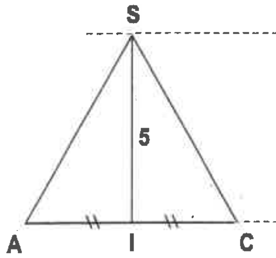


Figure 2
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan (ACS).
Le triangle ACS est isocèle en S.
Connaissant AB et AC, on peut construire le segment [SA].

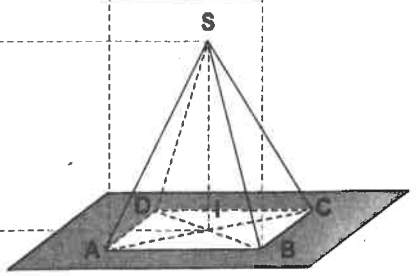


Figure 3
Représentation de la pyramide SABCD. [SI], [AB] et [CD] sont en dimensions réelles.

• En s'aidant des figures 1 et 2, on dessine le triangle ABS en dimensions réelles.

3) Détermination de la hauteur de la pyramide.
I est le milieu de [AC] et de [BD] car c'est le point d'intersection des diagonales du carré.
– (SI) est une médiane, donc aussi une médiatrice, de chacun des triangles ACS et BDS.
– Par conséquent : (SI) ⊥ (AC) et (SI) ⊥ (BD).
– La droite (SI) est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan, (AC) et (BD), donc (SI) est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le sommet de la pyramide.
(SI) est la hauteur de la pyramide SABCD.

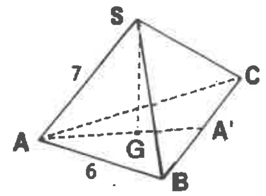
On admet la propriété suivante :
PROPRIÉTÉ

Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à sa base.

Exemple de calcul de la hauteur d'une pyramide régulière

SABC est une pyramide régulière de sommet S et de base le triangle équilatéral ABC. G est le centre de gravité du triangle ABC. L'unité de longueur est le cm, AB = 6 et SA = 7.

1) Justifie que [SG] est une hauteur de la pyramide.
2) Dessine en dimensions réelles la base ABC et la figure du plan (AGS).
3) Calcule AG et SG.



Esquisse

1) Détermination de la hauteur passant par le sommet S.
Le centre de gravité G du triangle équilatéral ABC est aussi le centre du cercle circonscrit à ce triangle. La droite (SG) est donc la hauteur de la pyramide régulière SABC.

2) Les dessins ci-dessous sont réalisés à l'échelle $\frac{1}{2}$.

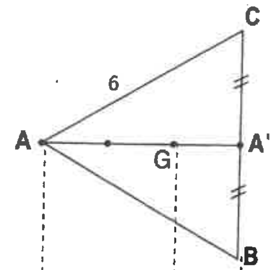


Figure 1
Dessin en dimensions réelles de la base

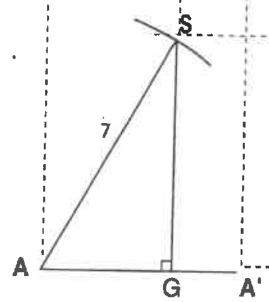


Figure 2
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan (AGS)

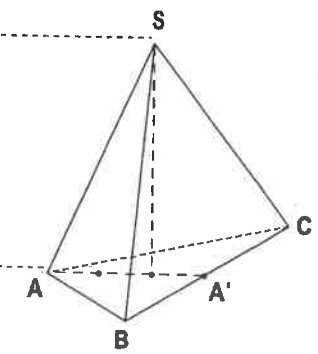


Figure 3
Représentation de la pyramide SABC

3) Calcul de AG
G est le centre de gravité du triangle équilatéral ABC, donc sa médiane [AA'] est aussi une hauteur du triangle.
On obtient : AA' = $3\sqrt{3}$.
Par conséquent : AG = $\frac{2}{3}$ AA' = $2\sqrt{3}$.

4) Calcul de SG
La hauteur (SG) est perpendiculaire au plan de la base (ABC), donc à toute droite de ce plan passant par G.
Donc : (SG) ⊥ (AG)
La propriété de Pythagore appliquée au triangle SAG, rectangle en G
donne : $AS^2 = AG^2 + GS^2$
d'où : $SG = \sqrt{AS^2 - AG^2} = \sqrt{37}$

EXERCICES

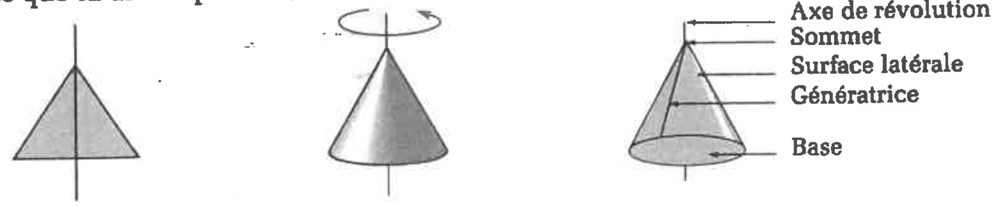
1.c SABCDE est une pyramide de sommet S telle que chacune des faces latérales soit un triangle isocèle en S. La hauteur de cette pyramide perce le plan (ABC) en I. Démontre que SA = SB = SC et que IA = IB = IC. Justifie que I est le centre d'un cercle qui passe par les points A, B, C, D et E. ABCDE est-il un pentagone régulier ?

1.d La hauteur d'une pyramide régulière à base carrée est 8 cm. Le périmètre de sa base est 16 cm. Calcule son volume, son aire latérale, et la longueur d'une arête joignant le sommet et la base.

1.4 CÔNE DE RÉVOLUTION

Présentation

En réalisant l'expérience décrite dans ton manuel de la classe de 4ᵉ de la CIAM page 107, le solide que tu as l'impression de voir est un **cône de révolution**.



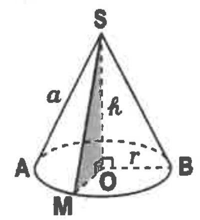
DÉFINITION

On appelle hauteur d'un cône la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

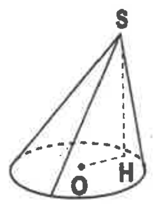
La hauteur d'un cône de sommet S perce le plan de la base au point H.
Le mot hauteur désignera, suivant le contexte, la droite (SH), le segment [SH] ou la distance SH.

PROPRIÉTÉ

La base d'un cône de révolution est un cercle, son axe est la hauteur du cône.

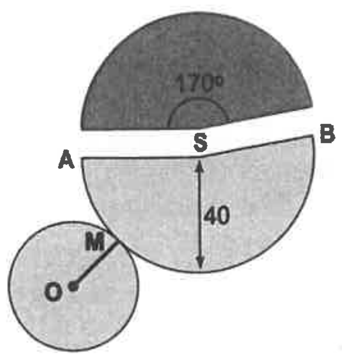


Autre exemple de cône



La base de ce cône est le cercle de centre O.
(SH) est la hauteur de ce cône. elle ne passe pas par O.
Ce cône n'est pas un cône de révolution.
Dans la suite, nous n'étudierons que des cônes de révolution.

Exemple de calcul de la hauteur d'un cône.

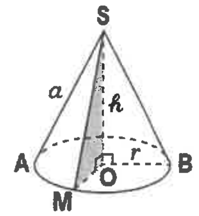


L'unité de longueur est le mm. L'angle au centre $\widehat{ASB}$ a partagé un disque de rayon 40 mm en deux parties, appelées des **secteurs circulaires**. Chacun de ces secteurs circulaires est le patron de la surface latérale d'un cône de révolution.

Considérons le cône ayant pour patron le secteur circulaire et le disque tramés en couleur.

- Cite deux génératrices de ce cône. Quelle est leur longueur ?
- Calcule le rayon OM de la base de ce cône.
- Représente ce cône.
- Calcule la hauteur SO du cône réalisé avec ce patron.

Calcul de volume et d'aire



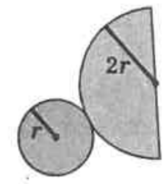
$\mathscr{A}$ désigne l'aire latérale du cône
$\mathscr{P}$ désigne le périmètre du cercle de rayon OA. ($\mathscr{P} = 2\pi r$)
On pose SA = a.

- Dessine un patron de ce cône.
- Calcule son aire latérale $\mathscr{A}$ en fonction de la génératrice a et du périmètre $\mathscr{P}$ de la base.

$\mathscr{B}$ étant l'aire de la base,
on admet que le volume $\mathscr{V}$ du cône est donné par la formule : $\boxed{\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}}$

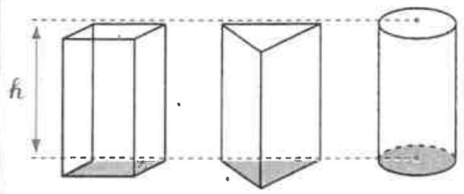
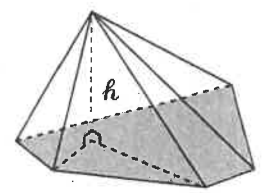
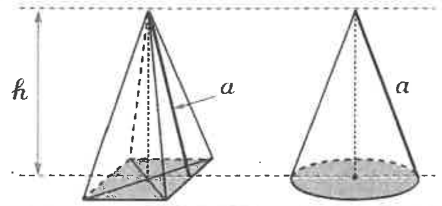
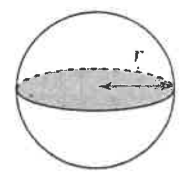
EXERCICES

1.e Explique pourquoi un disque de rayon r et un demi-disque de rayon $2r$ constituent le patron d'un cône.
Calcule l'aire et le volume de ce cône en fonction de r.



1.f Réalise, à l'échelle $\frac{1}{4}$, un patron d'un cône de hauteur 16 cm, et de diamètre de base 24 cm.

Volumes et aires de quelques solides

	Dessins de solides	Volumes	Aires
PRISMES et CYLINDRE		$\boxed{\mathscr{V} = \mathscr{B}\, h}$ $\mathscr{V}$: volume $\mathscr{B}$: aire d'une base h : hauteur	$\boxed{\mathscr{A} = \mathscr{P}\, h}$ $\mathscr{A}$: aire latérale $\mathscr{P}$: périmètre d'une base h : hauteur
PYRAMIDES		$\boxed{\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{B}\, h}{3}}$ $\mathscr{V}$: volume $\mathscr{B}$: aire d'une base	$\mathscr{A}$ est la somme des aires de chaque face latérale $\mathscr{A}$: aire latérale
PYRAMIDES RÉGULIÈRES et CÔNE DE RÉVOLUTION		$\boxed{\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{B}\, h}{3}}$ $\mathscr{V}$: volume $\mathscr{B}$: aire d'une base h : hauteur	$\boxed{\mathscr{A} = \dfrac{\mathscr{P}\, a}{2}}$ $\mathscr{A}$: aire latérale $\mathscr{P}$: périmètre de la base
SPHÈRE et BOULE		$\boxed{\mathscr{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3}}$ $\mathscr{V}$: volume r : rayon	$\boxed{\mathscr{A} = 4\pi r^2}$ $\mathscr{A}$: aire r : rayon

2 Sections planes

2.1 SECTION D'UNE PYRAMIDE RÉGULIÈRE PAR UN PLAN

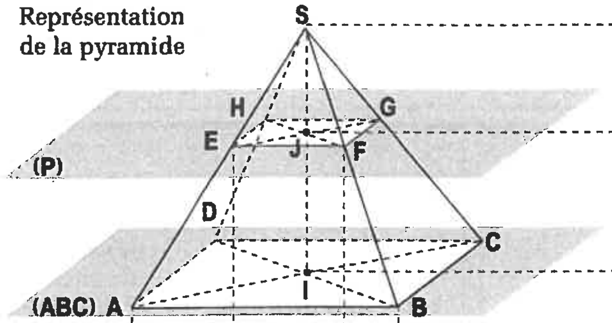
Section par un plan parallèle au plan de la base

SABCD est une pyramide régulière à base carrée. E est le point de [SA] tel que SE = 0,4 SA.
I est le centre de la base ABCD. L'unité de longueur étant le cm, AB = 7 ; SI = 6,5.
Le plan (P) passant par E et parallèle au plan (ABC) de la base de la pyramide coupe (SB) en F, (SC) en G et (SD) en H.

On veut démontrer que l'intersection de la surface latérale de cette pyramide et du plan (P) est un carré ; c'est la **section de la pyramide** par ce plan.

Les dessins ci-dessous sont réalisés à l'échelle $\frac{1}{2}$.

Figure 1
Représentation de la pyramide



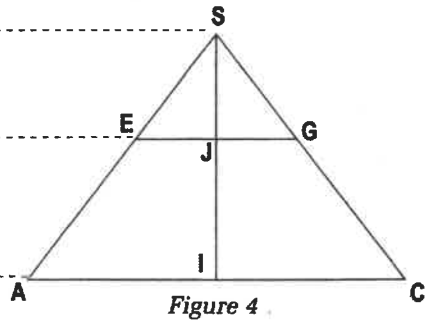


Figure 4
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan (SAC).
• Explique pourquoi : (EG) // (AC)
• Démontre que : SG = 0,4 × SC
EG = 0,4 × AC

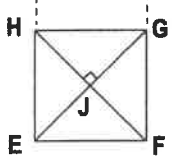


Figure 3
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan (P).
• Démontre que EF = FG
• Calcule $EF^2 + FG^2$. Justifie que (EF) ⊥ (FG)
• Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?

Figure 2
Dessin en dimensions réelles de la base de la pyramide

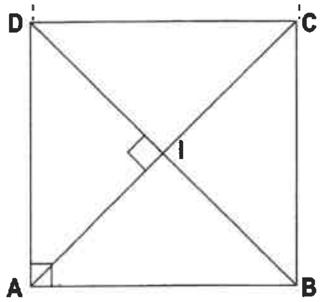


Figure 5
• Réalise le dessin de la face (SAB) en dimensions réelles, en t'aidant des figures 2, 3, 4.
• Explique pourquoi (EF) // (AB)

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base; les côtés de ces polygones sont parallèles deux à deux.

2.2 SECTION D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION PAR UN PLAN

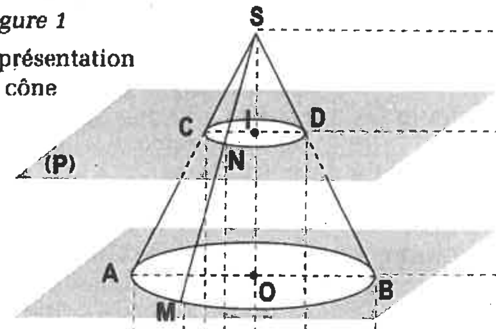
Section par un plan parallèle au plan de la base

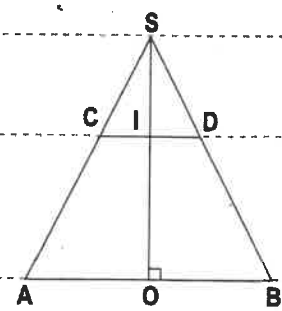
On considère un cône de révolution de sommet S, de base un disque de centre O et de diamètre [AB]. C est le point de la génératrice [SA] du cône tel que SC = 0,4 × SA.
L'unité de longueur étant le cm, AB = 6,5 ; SO = 6,5.
Le plan (P) passant par C et parallèle au plan de la base du cône coupe la génératrice [SB] en D.

On veut démontrer que l'intersection de la surface latérale du cône et du plan (P) est un cercle ; **c'est la section du cône** par ce plan.

Les dessins ci-dessous sont réalisés à l'échelle $\frac{1}{2}$.

Figure 1
Représentation du cône





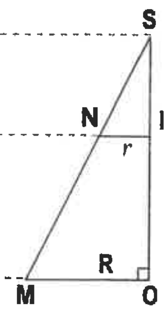
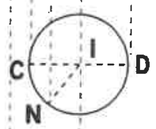


Figure 4
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan (SAB).
• Explique pourquoi (CD) // (AB).
• Démontre que SD = SC.
• Démontre que (SO) est la médiatrice de [CD].
I est le milieu de [CD].

Figure 5
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan (SOM).
• Démontre que N appartient au cercle contenu dans le plan (P), de centre I et de rayon 0,4 × AB.
• Nous admettrons que tout point de ce cercle appartient à la surface latérale du cône.

Figure 3
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan (P)



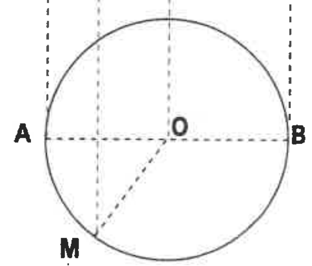


Figure 2
Dessin en dimensions réelles de la figure du plan de la base.

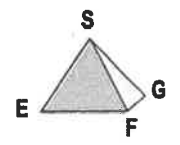
On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉS

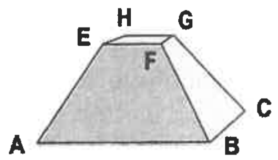
La section d'un cône de révolution et d'un plan parallèle à sa base est un cercle.

2.3 PROPRIÉTÉS DE RÉDUCTION

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base a mis en évidence :
– **le tronc de pyramide** ABCDEFGH.
– une deuxième pyramide. Cette pyramide a pour sommet S et pour base le carré EFGH.



petite pyramide



tronc de pyramide

On veut comparer les aires latérales et les volumes de ces deux pyramides.

• Calcule les quotients : $\frac{SJ}{SI}$;

$\frac{\text{aire latérale de SEFGH}}{\text{aire latérale de SABCD}}$;

$\frac{\text{volume de SEFGH}}{\text{volume de SABCD}}$

La section d'un cône par un plan parallèle au plan de la base a mis en évidence :
– **un tronc de cône.**
– un deuxième cône. Ce cône a pour sommet S et pour base le disque de centre I et de rayon [IC].

petit cône

tronc de cône

On veut comparer les aires latérales et les volumes de ces deux cônes.

• Calcule les quotients : $\frac{SI}{SO}$;

$\frac{\text{aire latérale du petit cône}}{\text{aire latérale du grand cône}}$;

$\frac{\text{volume du petit cône}}{\text{volume du grand cône}}$

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

**Lorsqu'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de cette pyramide.
Si l'échelle de la réduction est égale au nombre k, alors :**

$$\frac{\text{aires de la pyramide réduite}}{\text{aires homologues de la pyramide}} = k^2 \; ;$$

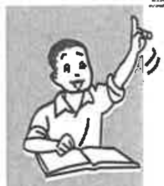
$$\frac{\text{volume de la pyramide réduite}}{\text{volume de la pyramide}} = k^3.$$

**Lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de ce cône.
Si l'échelle de la réduction est égale au nombre k, alors :**

$$\frac{\text{aires du cône réduit}}{\text{aires homologues du cône}} = k^2 \; ;$$

$$\frac{\text{volume du cône réduit}}{\text{volume du cône}} = k^3.$$

EXERCICES

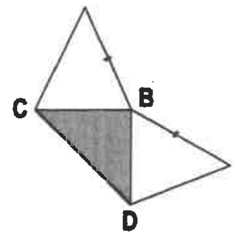


2.a La base d'une pyramide régulière de sommet S est un carré ABCD et E est un point de [SA].
Le plan parallèle au plan (ABC) et contenant le point E coupe (SB) en F, (SC) en G et (SD) en H. L'unité est le cm. Les points A,B, S et E sont tels que : AB = 12 ; SA = 10 ; SE = 8.
Calcule l'aire du polygone EFGH.
Calcule la hauteur de la face SAB, puis la hauteur de la pyramide SABCD.
Calcule le volume de cette pyramide et celui de la pyramide SEFGH.
Calcule le volume du tronc de pyramide ABCDEFGH.

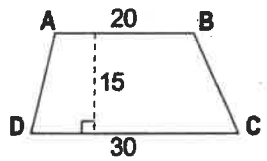
ENTRAÎNEMENT

1 PYRAMIDES ET CONES

1 La figure suivante représente un patron incomplet d'une pyramide de base BCD.
Complète ce patron en construisant la face latérale manquante.

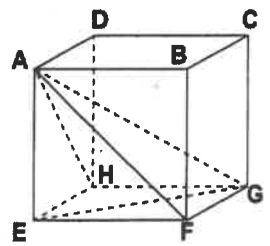


2 L'unité de longueur est le mm.
SABCD est une pyramide de hauteur 45.
Sa base ABCD est le trapèze de la figure ci-contre. Calcule le volume de cette pyramide.

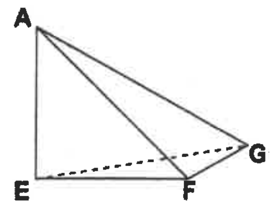


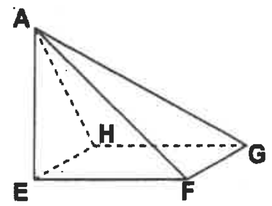
3 SABCD est une pyramide de hauteur 4,5 cm et de volume 9,375 cm³. Sa base est le carré ABCD. Calcule le côté de ce carré.

4 L'unité de longueur est le mm.
ABCDEFGH est un cube d'arête 20.



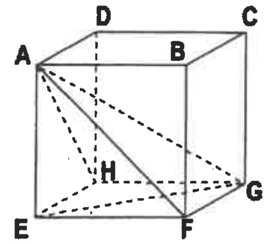
De ce cube, on extrait les pyramides AEFG et AEFGH.



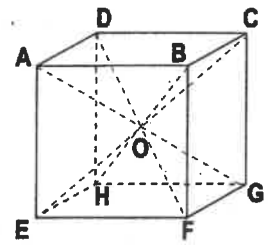


a) Dessine en dimensions réelles
– la figure du plan (AEF),
– la figure du plan (EFG),
– la figure du plan (AEG),
– la figure du plan (AHG).
b) Quelle est la nature de chacun des triangles AEF, AEH, AEG, AFG, AHG.
c) Calcule l'aire de la base EFG et le volume de la pyramide AEFG.
d) Calcule l'aire de la base EFGH et le volume de la pyramide AEFGH.
e) Calcule EG et AG
f) Dessine, en dimensions réelles, un patron de chacune d'elles.
g) Calcule l'aire de chacune des faces latérales.

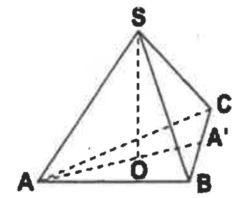
5 ABCDEFGH est un cube.
La pyramide AEFG extraite de ce cube a pour volume 27 cm³.
Calcule le volume du cube ABCDEFGH.



6 ABCDEFGH est un cube. Les diagonales du cube [AG], [BH], [CE] et [DF] se coupent au point O, le centre du cube.
Nomme toutes les pyramides régulières à base carrée, tracées sur le dessin.

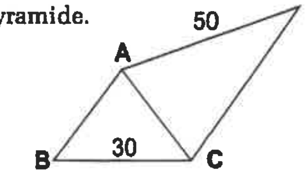


7 L'unité de longueur est le mm.
SABC est une pyramide régulière de base ABC telle que AB = 40 et SA = 60.
[SO] est la hauteur de cette pyramide.
A' est le point d'intersection de (AO) et (BC).

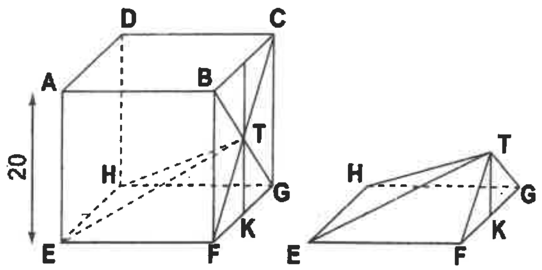


a) Dessine en dimensions réelles les figures de chacun des plans (ABC), (SAC) et (SOA).
b) Calcule AA' ; SO et SA'.
c) Calcule l'aire de la base, l'aire latérale et le volume de cette pyramide.

8 L'unité de longueur est le mm.
La figure ci-dessous est une partie d'un patron à l'échelle $\frac{1}{2}$ de la pyramide régulière SABC.
Termine ce patron.
Calcule l'aire latérale, l'aire totale et le volume de cette pyramide.



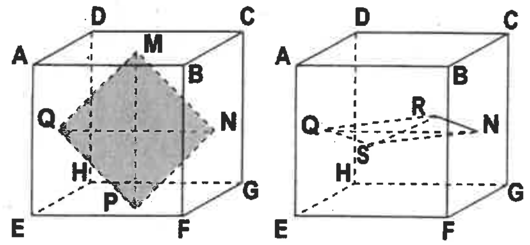
9 L'unité de longueur est le mm.
ABCDEFGH est un cube ; T est le centre du carré BCGF ; K est le milieu de l'arête [FG].



a) Quelle est la hauteur de la pyramide TEFGH ?
Calcule le volume de cette pyramide.
b) SEFGH est une pyramide régulière de même base et de même volume que la pyramide TEFGH.
Fais une esquisse de la représentation en perspective de cette pyramide régulière.
Dessine un patron et calcule l'aire latérale de cette pyramide.

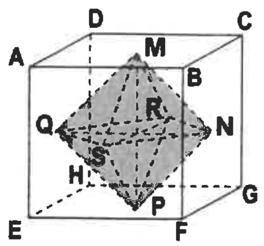
10 Dessine deux patrons différents d'une même pyramide régulière dont les trois faces et la base sont des triangles équilatéraux.

11 ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête.



Les points M, N, P, Q, R et S sont les centres respectifs des faces ABCD, BCGF, EFGH, ADHE, CDHG et ABFE.
Démontre que MNPQ et QRNS sont des carrés.

12 ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête.
Les points M, N, P, Q, R et S sont les centres respectifs des faces ABCD, BCGF, EFGH, ADHE, CDHG et ABFE.



a) On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ le plan déterminé par les droites sécantes (MP) et (NQ).
• Dessine en dimensions réelles la figure du plan $(\mathcal{P}_1)$.
• Nomme trois carrés dont les sommets sont les centres des faces du cube.
Justifie qu'ils ont le même centre O et des diagonales de même longueur.
b) Nomme deux pyramides régulières de base le carré MNPQ.
Justifie que la pyramide MNRQS est une pyramide régulière. Quelle est sa hauteur ?
Calcule son volume.

13 ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm.
P est le centre de la face EFGH et Q est le centre du cube.
PABCD et QABCD sont les pyramides régulières de sommets respectifs P et Q.
Calcule le volume de chacune de ces pyramides.

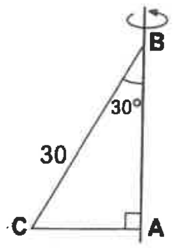
14 Une grande case a la forme d'un cylindre de 12 m de rayon et 3 m de hauteur, surmonté d'un toit en forme de cône de révolution dont le sommet est situé à12 m du sol.
Quelle est, en litres, la quantité d'air contenu dans cette case ($\pi \approx 3,14$) ?

15 Par quelle fraction doit-on multiplier le rayon de la base d'un cône de révolution de façon à ce qu'en multipliant la hauteur par 9, le volume reste le même ?

16 Un verre conique a une contenance de 25 cl.
Quelle est la hauteur du liquide dans le verre lorsqu'il est rempli sachant que le diamètre de l'ouverture est 8 cm ($\pi \approx 3,14$) ?

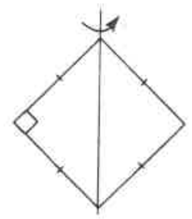
17 Un cornet de glace a la forme d'un cône de révolution de hauteur 12 cm et de diamètre de base 5 cm.
a) Quelle est, en cl, la contenance d'un cornet ($\pi \approx 3,14$) ?
b) On remplit entièrement le cornet avec de la glace et on ajoute au dessus du cornet une demi-boule de glace de diamètre 5 cm. Combien de cornets peut-on vendre avec 2,5 litres de glace ?

18 L'unité de longueur est le cm.
Calcule la hauteur, le rayon de la base et le volume du cône de révolution obtenu en faisant tourner le triangle ABC autour de (AB), sachant que BC = 30 et mes $\widehat{ABC} = 30°$ ($\pi \approx 3,14$).



19 Calcule le volume d'un cône de révolution sachant que le périmètre du cercle de base est 44 cm et qu'une génératrice mesure 25 cm (on prendra $\pi \approx \frac{22}{7}$).

20 Calcule le volume du solide de révolution engendré par un carré de 5 cm de côté tournant autour d'une de ses diagonales ($\pi \approx 3,14$).



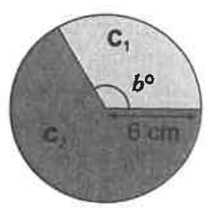
21 Un cône de révolution a une génératrice de 20 cm ; sa base a un rayon de 12 cm.
Calcule la hauteur de ce cône et son volume ($\pi \approx 3,14$).

22 Un cône de révolution a une génératrice de 45 cm ; sa base a un rayon de 15 cm.
Calcule l'aire latérale de ce cône ($\pi \approx 3,14$).

23 Un cône de révolution a une génératrice de 35 cm. Un patron de ce cône est constitué d'un secteur circulaire de mesure 135°.
Calcule le rayon de la base de ce cône ($\pi \approx 3,14$).

24 Un cône de révolution a une génératrice de 75 cm. Ce cône a pour aire latérale 11 775 cm².
Calcule le rayon de sa base, sa hauteur et son volume ($\pi \approx 3,14$).

25 La figure ci-dessous représente les patrons des surfaces latérales de deux cônes de révolution découpés dans un disque de rayon 6 cm.
Calcule le rayon de la base, la hauteur et le volume de chaque cône obtenu sachant que $b° = 120°$ ($\pi \approx 3,14$).



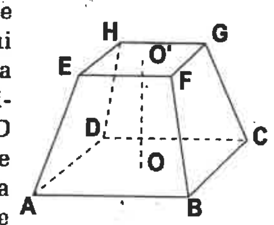
2 SECTIONS PLANES

26 SABCD est une pyramide régulière de hauteur 18 cm et dont la base ABCD est un carré de 12 cm de côté. Le plan parallèle à la base qui passe par le milieu K de [SA] coupe les arêtes [SB], [SC] et [SD] respectivement en L, M et N.
Calcule l'aire du carré KLMN et le volume de chacune des pyramides SABCD et SKLMN.

27 Une pyramide P a pour volume 984 m³.
Une section à mi-hauteur détermine une petite pyramide P' et un tronc de pyramide T.
Calcule les volumes de P' et de T.
Quels sont les rapports $\frac{\text{volume P'}}{\text{volume P}}$ et $\frac{\text{volume T}}{\text{volume P}}$?

28 La section de la pyramide régulière SABCD par un plan parallèle à sa base ABCD détermine la petite pyramide SEFGH et le tronc de pyramide ABCDEFGH.
Sachant que SABCD a une hauteur de 27 cm et que les bases ABCD et EFGH du tronc de pyramide ont respectivement pour aire 324 cm² et 64 cm², calcule la hauteur de la petite pyramide.
Calcule le volume du tronc de pyramide.

29 L'unité de longueur est le cm.
ABCDEFGH est le tronc de pyramide qui a été obtenu par la section d'une pyramide de régulière SABCD de hauteur [SO], par le plan parallèle à la base qui passe par le point O'.



Sachant que AB = 40, EF = 30 et OO' = 25, calcule le volume de la grande pyramide SABCD et le volume du tronc de pyramide ABCDEFGH.

30 L'unité de longueur est le cm.
SABCD est une pyramide régulière de sommet S, de hauteur [SO] telle que SO = 10 et dont la base ABCD est un carré de côté 6.
a) Fais une représentation de cette pyramide.
b) On effectue une 1^re^ section de cette pyramide par un plan $(\mathcal{P}_1)$ parallèle à la base et qui coupe (SO) au point H tel que SH = 3 et une 2^e^ section de cette pyramide par un plan $(\mathcal{P}_2)$ parallèle à la base et qui coupe (SO) au point H' tel que SH' = 7.

EXERCICES

Fais la représentation de ces deux sections sur le dessin précédent.
Calcule le volume du tronc de pyramide compris entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

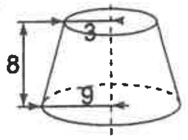
31 SABC est une pyramide régulière de sommet S, de hauteur [SO] et dont les trois faces et la base ABC sont des triangles équilatéraux de côté 5 cm.
On effectue la section de cette pyramide par un plan $(\mathcal{P})$ parallèle à la base et qui passe par le milieu H de [SO].
a) Représente la pyramide et la section de pyramide obtenue. Calcule le volume de la pyramide SABC.
b) Calcule le volume du tronc de pyramide.
c) Calcule le rapport des volumes du tronc de pyramide et de la pyramide SABC.

32 L'unité de longueur est le cm. La base d'un cône de sommet S est un cercle de diamètre [AB] et E est un point de [SA]. Le plan (P) parallèle à la base et contenant E coupe [SB] en F.
On a : SA = 13, AB = 10 et SE = 9
a) Calcule la hauteur du cône puis son aire latérale.
b) Calcule l'aire latérale du cône de sommet S ayant pour base le cercle de diamètre [EF].
c) Quelle est l'aire totale du tronc de cône délimité par le cercle de diamètre [AB] et le cercle de diamètre [EF] ? Calcule le volume de ce tronc de cône.

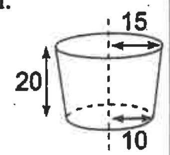
33 Un cône a pour volume 9 400 cm³.
L'aire de sa base est égale à 705 cm².
Une section à mi-hauteur détermine un petit cône P et un tronc de cône T.
Calcule les volumes de P et de T.
Calcule l'aire de la base et la hauteur de P.

34 Une petite lampe-torche émet un faisceau lumineux en forme de cône dont le sommet S est la source lumineuse supposée ponctuelle.
En plaçant un écran perpendiculairement à la lampe-torche et à 3 cm de S, on obtient un disque lumineux de 10 cm de diamètre.
a) A quelle distance de S doit-on placer l'écran pour obtenir un disque lumineux de 18 cm de diamètre ?
b) Quel est le diamètre du disque lumineux si l'écran est placé à 7,5 cm de S ?

35 L'unité de longueur est le cm.
L'esquisse ci-contre représente l'abat-jour d'une lampe.
Quelle est l'aire de la surface latérale de cet abat-jour ($\pi \approx 3,14$) ?

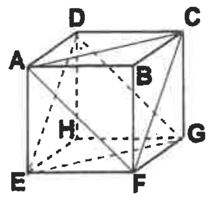


36 L'unité de longueur est le cm.
Un pot de fleur a la forme d'un tronc de cône de révolution de hauteur 20, de diamètre à la base 10 et de diamètre au sommet 15.
Calcule le volume du pot de fleur ($\pi \approx 3,14$).



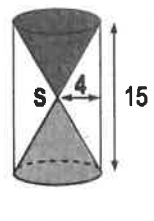
APPROFONDISSEMENT

37 ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm.
a) Calcule l'aire totale de la pyramide FABC.
b) Compare le volume de la pyramide DEFH et le volume de la pyramide FABC.



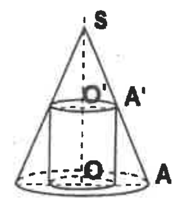
38 Calcule, en fonction de r, les volumes respectifs $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_3$ du cylindre, de la demi-boule et du cône. Démontre que
– l'un de ces trois volumes est égal à la somme des deux autres volumes.
– l'un de ces trois volumes est égal à la demi-somme des deux autres.

39 L'unité de longueur est le cm.
La figure ci-dessous représente deux cônes identiques de sommet S placés à l'intérieur d'un cylindre de rayon 4 et de hauteur 15. Les deux cônes sont remplis de sable.
Calcule le volume de la partie non remplie de sable et le rapport de ce volume au volume du cylindre.

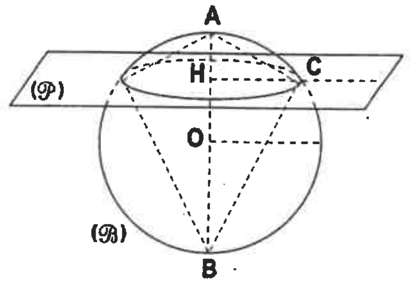


EXERCICES

40 Un cylindre et un cône ont le même axe et le cylindre est à l'intérieur du cône comme l'indique la figure ci-contre.
Le rayon du cylindre est 2 cm et sa hauteur 4 cm ; le rayon de la base du cône est 6 cm.
a) Dessine en dimensions réelles la figure du plan (SOA)
b) Calcule la hauteur du cône.
c) Calcule les volumes du cylindre et du cône.

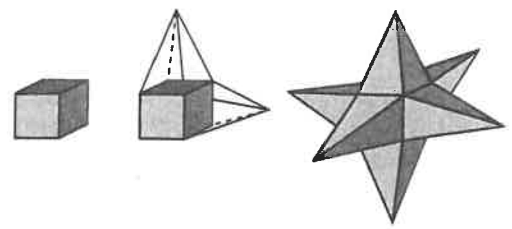


41 L'unité de longueur est le cm.



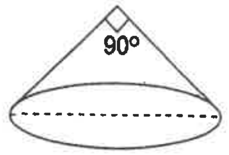
$(\mathcal{B})$ est une boule de centre O de rayon 13.
[AB] est un diamètre de $(\mathcal{B})$.
On sectionne la boule $(\mathcal{B})$ par un plan $(\mathcal{P})$ perpendiculaire à (AB) au point H tel que OH = 5.
La section obtenue est un disque $(\mathcal{D})$.
a) Calcule l'aire du disque $(\mathcal{D})$ ($\pi \approx 3,14$).
b) Calcule le volume du solide formé par les deux cônes de base $(\mathcal{D})$ et de sommets respectifs A et B.

42 Ibrahima, le menuisier du village, veut réaliser une étoile en bois. Pour cela, il réalise d'abord un cube de 5 cm d'arête, puis, sur chacune des faces du cube il fixe une pyramide régulière dont la base est une face du cube et dont la hauteur est 9 cm.
Le cube et les six pyramides sont taillés dans un même bois de masse volumique 0,8 g/cm³.

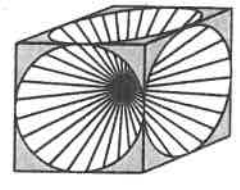


Calcule la masse de cette étoile.

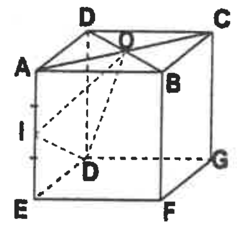
43 Depuis le sommet d'un cône de révolution de hauteur 1 m, on voit deux points diamétralement opposés du cercle de base sous un angle de 90°.
Calcule la longueur d'une génératrice de ce cône.



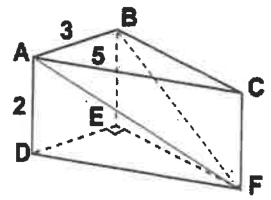
44 Dans un cube d'arête 20 cm et de masse 8 kg, on évide six cônes ayant pour sommet commun le centre du cube et pour base les disques inscrits dans chacune des six faces du cube.
Calcule la masse du cube évidé ($\pi \approx 3,14$).



45 ABCDEFGH est un cube de 5 cm d'arête.
Le point I est le milieu de [AE] et le point O est le centre du carré ABCD.
a) Dessine en dimensions réelles la figure de chacun des plans (ADE), (ACE) et (BDF)
b) Calcule IH, OI et OH.
Le triangle OIH est-il rectangle ?
c) OAIHD est une pyramide. Quel est son sommet? Quelle est la nature de sa base ?
d) M est le milieu de [AD] et N le milieu de [IH].
Démontre que : (OM) ⊥ (MN).
Quelle est la hauteur de la pyramide OAIHD ?
e) Calcule le volume de la pyramide OAIHD.



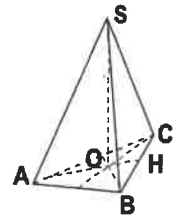
46 L'unité de longueur est le cm.
ABCDEF est un prisme droit de hauteur 2, de bases les triangles rectangles ABC et DEF tels que AB = 3 et AC = 5.



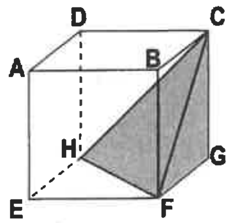
EXERCICES

a) Calcule l'aire totale et le volume du prisme.
b) On coupe le prisme droit suivant le plan (ABF). Calcule l'aire totale et le volume de chacune des deux pyramides obtenues.

47 SABC est une pyramide régulière de sommet S, de hauteur [SO] et de base le triangle équilatéral ABC de côté a.
On pose : SO = h et SA = SB = SC = ℓ.
a) Dessine la figure du plan (SAH) et démontre que : $\ell^2 = h^2 + \frac{a^2}{3}$.
b) Dans le cas où les trois faces de la pyramide SABC sont des triangles équilatéraux, exprime h en fonction de a.



48 ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.



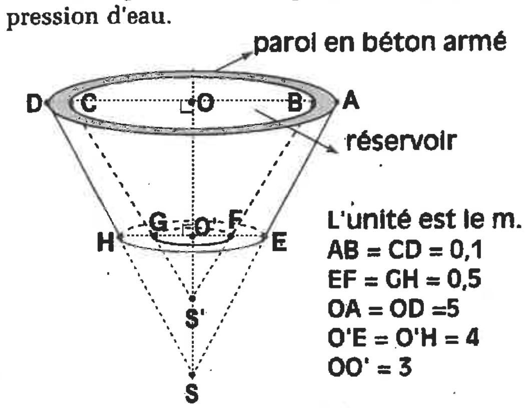
a) Calcule le volume de la pyramide GCFH.
b) On retire du cube quatre « coins » de forme identique à cette pyramide, à savoir, GCFH, EAFH, DACH et BACF.
Le solide restant est une pyramide ACFH.
Quelles sont ses arêtes ?
Calcule son volume et une hauteur.

RECHERCHE

49 On raconte que l'historien grec Hérodote tenait de la bouche même des prêtres égyptiens que les dimensions de la pyramide de Chéops avaient été calculées de façon que le carré de la hauteur soit égal à l'aire d'une face latérale.
Quel crédit peut-on accorder à cette affirmation sachant que la pyramide de Chéops est une pyramide régulière de 146 m de hauteur et ayant pour base un carré de 230 m de côté ?
(On tiendra compte de la relative précision des mesures des longueurs de cette pyramide).

50 L'unité de longueur est le cm ($\pi \approx 3{,}14$).
a) Calcule la contenance, en cl, d'un pot de yaourt tronconique de hauteur 7 dont les disques de bases ont respectivement pour diamètres 5 et 6.
b) Calcule la hauteur d'un seau tronconique de 10 litres de contenance et dont les disques de bases ont respectivement pour rayons 10 et 13.

51 L'unité de longueur est le m. L'esquisse ci-dessous représente le réservoir d'un château d'eau en béton armé en forme d'un tronc de cône de révolution. L'épaisseur de la paroi en béton armé est plus grande à la base du réservoir qu'au sommet pour des raisons de pression d'eau.



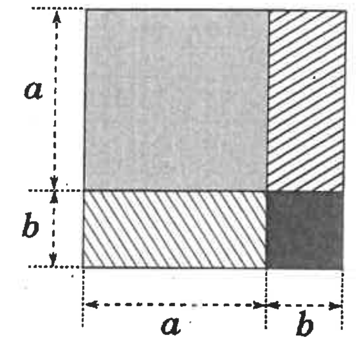
a) Calcule OS et OS'.
b) Calcule, puis donne, en m^3, une approximation décimale d'ordre 3 de la capacité du réservoir. Déduis-en la masse d'eau, en tonnes, contenue dans le réservoir lorsqu'il est plein.
c) Le réservoir est fermé :
– à la base, par une dalle cylindrique en béton de diamètre EH et d'épaisseur 0,5 m ;
– au sommet, par une dalle cylindrique en béton de diamètre AD et d'épaisseur 0,1 m.
Calcule le volume de la paroi latérale, le volume des deux dalles de bases et le volume total de l'ouvrage en béton ($\pi \approx 3{,}14$).
d) Sachant que le béton employé a une densité de 2,5 kg/dm^3, calcule la masse du réservoir vide et la masse du réservoir plein d'eau.

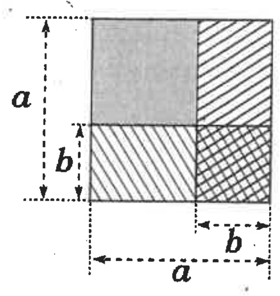
ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Tout a été créé par les nombres qui étaient le modèle exemplaire dans l'esprit du créateur.

Severinius BOECE (480-524, Rome)

10 Calcul littéral





$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Viète (1540 - 1603) est considéré comme le créateur de l'Algèbre moderne. Aux nombres employés jusque là dans les résolutions de certains problèmes, il substitua des lettres qui représentaient des grandeurs quelconques, transformaient le raisonnement particulier en formule générale, en loi.

Descartes (1596 - 1650) introduisit la notation des exposants et le principe de leur calcul.

Diophante (IIIe siècle) était en général considéré comme le père de l'algèbre.

L'Inde est cependant actuellement reconnue comme le berceau de l'Algèbre.

SOMMAIRE

1 Quotients

1.1 TABLEAUX DE PROPORTIONNALITÉ ET ÉGALITÉS DE QUOTIENTS

Activité

Un marchand de canards a mémorisé le tableau suivant. Après avoir pesé l'animal qu'il doit vendre, il en calcule mentalement le prix par addition.
(Il utilise une balance graduée à 50 g près).

Masses, en gramme	1 000	500	200	100	50
Prix, en francs	900	450	180	90	45

- Quel est le prix demandé pour un canard dont la masse est 1,650 kg ?
- Quels nombres devrait-il ajouter à son tableau, s'il avait une balance précise à 10 g ?
- Que représente le quotient $\frac{900}{1000}$?

Tableaux de proportionnalité et égalités de quotients

On peut traduire les situations et les propriétés de proportionnalité par :

un tableau de proportionnalité	des égalités de quotients
$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline \end{array}$ $\times k$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & c & a+c \\ \hline b & d & b+d \\ \hline \end{array}$ $+$; $+$; $\times k$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & c & h\,c \\ \hline b & d & h\,d \\ \hline \end{array}$ $\times h$; $\times h$; $\times k$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{h\,c}{h\,d}$

Les nombres qui interviennent dans ces tableaux sont différents de 0.

1.2 TRANSFORMATIONS D'ÉGALITÉS DE QUOTIENTS

Activité

a, b, c, d sont des nombres différents de 0.

- Démontrons que : $ad = bc$ *équivaut à* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Pour cela, justifie les étapes de la démonstration ci-dessous.

On a : $ad = bc$ *équivaut à* $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$;

or : $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ *équivaut à* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

donc : $ad = bc$ *équivaut à* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- Par quel nombre faut-il multiplier chaque membre de l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ pour obtenir chacune des égalités suivantes :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\ ; \qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}\ ; \qquad \frac{1}{c} = \frac{b}{ad}\ ; \qquad a = \frac{bc}{d}\ ?$$

PROPRIÉTÉ

a, b, c et d sont des nombres différents de 0

$\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ ***équivaut à*** $ad = bc$

*Le produit des **extrêmes** est égal au produit des **moyens**.*

a, b, c et d sont des nombres **différents de 0**

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *équivaut à* $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

« Échange des extrêmes ».

a, b, c et d sont des nombres **différents de 0**

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *équivaut à* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

« Échange des moyens ».

1.3 OPÉRATIONS SUR LES QUOTIENTS

RÈGLES

a, b, c et d sont des nombres différents de 0

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

EXERCICE

1.c Écris les expressions suivantes sous forme d'une fraction :

$\frac{2,2}{5} + \frac{1,1}{7}$; $\frac{3,5}{24} \times \frac{42}{5,5}$; $\frac{8}{9} : \frac{2,6}{15}$.

2 Calcul littéral

2.1 PUISSANCE À EXPOSANT ENTIER RELATIF

Présentation

a est un nombre différent de 0.

On sait que m et n étant des nombres entiers naturels, si $m > n$ alors $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

On voudrait pouvoir écrire, par exemple $\frac{85^4}{85^7} = 85^{4-7} = 85^{-3}$. Or : $\frac{85^4}{85^7} = \frac{1}{85^3}$.

On convient de dire que 85^{-3} est l'inverse de 85^3.

NOTATION

a est un nombre différent de 0, n est un nombre entier naturel différent de 0, L'inverse de a^n est noté a^{-n}.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{-n} \times a^n = 1$$

Activité

• En utilisant la définition, écris sous la forme a^n chacune des expressions suivantes. Quelles règles retrouves-tu ?

$3^2 \times 3^{-4}$; $34^{-5} \times 34^{-2}$; $\frac{7^{-3}}{7^{-7}}$; $\frac{101^5}{101^{-8}} \times 101^{-11}$; $(5^{-2})^5$; $(6^7)^{-8}$; $(2^{-6})^{-4}$.

• a et b sont des nombres différents de 0, n est un nombre entier plus petit que 0. On veut démontrer que $a^n \times b^n = (ab)^n$. Pour cela, justifie chacune des étapes ci-contre.

$$a^n \times b^n = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \times b^{-n}} = \frac{1}{(ab)^{-n}} = (ab)^n.$$

• Démontre les propriétés suivantes. (On pourra utiliser la définition d'un exposant négatif.)

PROPRIÉTÉS

a et b sont des nombres différents de 0, m et n sont des nombres entiers relatifs.

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$; $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

EXERCICE

2.a a et b sont des nombres différents de 0. Écris plus simplement :

$a^{-4} \times b^{-4}$; $a^{-5} \times a^{-3}$; $a^{-6} \times a^2$; $(a^{-7})^{-2}$; $(a^{-2})^3$; $\frac{a^{-2}}{a^{-5}}$; $\frac{a^{-3}}{a}$; $\frac{a}{a^{-6}}$

2.2 DÉVELOPPEMENTS ET RÉDUCTIONS

Pour développer, réduire ou factoriser des expressions littérales, on peut utiliser les propriétés suivantes, vues en classe de Quatrième.

PROPRIÉTÉS

Suppression de parenthèses

a et b sont des nombres ; on a

$a + (b - c) = a + b - c$
$a - (b + c) = a - b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$

Règles de priorité

La multiplication est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.
L'élévation à une puissance est prioritaire sur la multiplication.

Développement d'un produit, factorisation

x, y et z sont des nombres ; on a

$x(y + z) = xy + xz$
$x(y - z) = xy - xz$

Égalités remarquables

a et b sont des nombres ; on a

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemple 1

• *Développons et réduisons l'expression A :*

$A = (2a - 6)(3 - 4a) + 7a^2$

$A = 6a - 8a^2 - 18 + 24a + 7a^2$
$A = 7a^2 - 8a^2 + 24a + 6a - 18$
$A = -a^2 + 30a - 18$

• *Calculons sa valeur numérique pour $a = -4$:*

$A = -a^2 + 30a - 18$

$A = -(-4)^2 + 30 \times (-4) - 18$
$A = -16 + (-120) - 18$
$A = -154$

Exemple 2

• *Développons et réduisons les expressions littérales P, Q et R :*

$P = (12a + 17)^2$

$P = (12a)^2 + 2 \times 12a \times 17 + (17)^2$

$P = 144a^2 + 408a + 289$

$Q = (\frac{7a}{2} - 5)^2$

$Q = (\frac{7a}{2})^2 - 2(\frac{7a}{2}) \times 5 + (5)^2$

$Q = \frac{49a^2}{4} - 35a + 25$

$R = (13x - 15)(13x + 15)$

$R = (13x)^2 - (15)^2$

$R = 169x^2 - 225$

EXERCICE

2.b Développe et réduis les expressions littérales suivantes :

$5x(x + 3) - 4x(x - 2)$; $(2x - 5)(3x - 1)$; $(2x - 3)(3 - 2x)$;
$(x + 6)(x - 4) - (x - 3)^2$; $(x + 4)^2$; $(\frac{3x}{4} - 1)^2$.

2.3 FACTORISATIONS

Mettre en évidence un facteur commun

Factorisons les expressions littérales A, B et C :

$A = 2x\,(3x + 1) - 17\,(3x + 1)$

$A = 2x\,(3x + 1) - 17\,(3x + 1)$
$A = (3x + 1)\,(2x - 17)$

$B = 3x\,(2x + 1) + 2x + 1$

$B = 3x\,(2x + 1) + 2x + 1$
$B = 3x\,(2x + 1) + 1\,(2x + 1)$
$B = (2x + 1)\,(3x + 1)$

$C = x\,(x - 1) + 3\,(1 - x)$

$C = x\,(x - 1) + 3(-1)(x - 1)$
$C = x\,(x - 1) - 3(x - 1)$
$C = (x - 1)\,(x - 3)$

Utiliser des égalités remarquables

Factorisons les expressions littérales A, B et C :

$A = 9a^2 + 24a + 16$

$A = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 4 + 4^2$
$A = (3a + 4)^2$

$B = 64 - 16x + x^2$

$B = 8^2 - 2 \times 8 \times x + x^2$
$B = (8 - x)^2$

$C = 25 - (3x + 7)^2$

$C = 5^2 - (3x + 7)^2$
$C = [5 - (3x + 7)]\,[5 + (3x + 7)]$
$C = (-2 - 3x)\,(12 + 3x)$

Utiliser plusieurs techniques

Factorisons les expressions littérales A, B et C :

$A = x^3 - x$

$A = x\,(x^2 - 1)$
$A = x\,(x - 1)\,(x + 1)$

$B = 4x^2 - 9 + (x + 1)\,(2x - 3)$

$B = (2x)^2 - 3^2 + (x + 1)\,(2x - 3)$
$B = (2x + 3)\,(2x - 3) + (x + 1)\,(2x - 3)$
$B = (2x - 3)\,[(2x + 3) + (x + 1)]$
$B = (2x - 3)\,(3x + 4)$

$C = x^2 - 10x + 25 + 4x\,(5 - x)$

$C = 5^2 - 2 \times 5x + x^2 + 4x\,(5 - x)$
$C = (5 - x)^2 + 4x\,(5 - x)$
$C = (5 - x)\,[(5 - x) + 4x]$
$C = (5 - x)\,(5 + 3x)$

MÉTHODE

Pour factoriser une expression littérale,
on peut procéder comme suit :

- Mettre en évidence un facteur commun à chaque terme et utiliser une des égalités suivantes : $ka + kb = k\,(a + b)$; $ka - kb = k\,(a - b)$
- Reconnaître et utiliser les égalités remarquables :
  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$
- Utiliser plusieurs de ces techniques.

EXERCICE

2.c Factorise les expressions littérales suivantes.

$5x\,(x - 3) - x$; $4x\,(1 - x) + (x - 1)^2$ $x^2 + 6x + 9$; $9x^2 - 12x + 4$;

$-x^3 + 4x$; $4x^2 - \dfrac{49}{81}$; $\dfrac{16}{25} - (2x + 1)^2$; $1{,}21x^2 - 2{,}2x + 1$.

2.4 PRODUIT NUL, NOMBRES DE MÊME CARRÉ

Produit nul

Le produit ab est égal à 0 dans chacun des trois cas suivants :
$a = 0$ *et* $b \neq 0$; $a \neq 0$ *et* $b = 0$; $a = 0$ *et* $b = 0$;
On résume ces trois cas par : $a = 0$ *ou* $b = 0$
On admet que le produit ab est différent de 0 dans le quatrième cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

PROPRIÉTÉS

Un produit est égal à zéro lorsque l'un au moins de ses facteurs est égal à zéro.
Un produit est différent de zéro lorsque tous ses facteurs sont différents de zéro.

a et b sont des nombres.

$ab = 0$ *équivaut à* $a = 0$ *ou* $b = 0$
$ab \neq 0$ *équivaut à* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$

Nombres de même carré

On sait que deux nombres opposés ont le même carré : $(1{,}25)^2 = (-1{,}25)^2 = 1{,}562\,5$
Existe-t-il d'autres nombres que les nombres a ou $-a$, ayant a^2 pour carré ?

Cherchons un nombre x tel que : $x^2 = a^2$
On a : $x^2 - a^2 = 0$
$(x - a)(x + a) = 0$
or : $(x - a)\,(x + a) = 0$ *équivaut à* $x - a = 0$ ou $x + a = 0$
$x^2 = a^2$ *équivaut à* $x = a$ ou $x = -a$

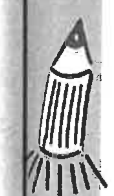
Les seuls nombres ayant a^2 pour carré sont a et $-a$.

PROPRIÉTÉS

- **a et b sont des nombres.**
  $a^2 = b^2$ ***équivaut à*** $a = b$ **ou** $a = -b$

- **a et b sont des nombres positifs.**
  $a^2 = b^2$ ***équivaut à*** $a = b$

CALCUL RAPIDE



- Développe et réduis l'expression littérale : $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$.
  Calcule : $1\,001^2 - 999^2$
- Factorise l'expression : $(x + 1)^2 - x^2$.
  Calcule : $2\,439^2 - 2\,438^2$.
- Factorise l'expression : $100n\,(n + 1) + 25$.
  Calcule : 75^2 ; 105^2.

3 Exemples d'expressions littérales

3.1 POLYNÔMES

Présentation

$$\underbrace{5x^2}_{\text{monôme en } x}$$

coefficient → $5x^2$ ← degré

On considère l'expression littérale : $5x^2$;
c'est un **monôme** en x,
5 est le **coefficient** du monôme,
2 est le **degré** du monôme.

On rappelle que pour x différent de 0, $x^0 = 1$; $47x^0 = 47$; $-3{,}5x^0 = -3{,}5$; …
On convient de dire que **tout nombre différent de 0 est un monôme.**

degré du polynôme

$$\underbrace{22x^9 - 76x^6 - 5}_{\text{polynôme en } x}$$

On considère l'expression littérale : $22x^9 - 76x^6 - 5$;
c'est une somme algébrique de monômes. Elle est réduite. Ses termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x.

$22x^9$ est le monôme de degré le plus élevé de cette expression littérale, il a 9 pour degré.
On dit que $22x^9 - 76x^6 - 5$ est un **polynôme** de degré 9.

Développer, réduire, ordonner

On a : $7x^2 \times 5x^4 = (7 \times 5)\, x^2 \times x^4 = 35x^{2+4} = 35x^6$

- Réduis les expressions littérales suivantes : $(-3{,}14)x^{56} \times 3x^4$; $\frac{-8}{5} x^7 \times 5x$.

On a : $7x^2 + 5x^2 = (7 + 5)\, x^2 = 12x^2$

- Réduis les expressions littérales suivantes : $(-3{,}14)x^{56} + 3x^{56}$; $\frac{-8}{5} x^7 + 5x^7$.

On a : $5x + 6x^3 - 1 - 7x + 12x^3 - 14x^3 - 6x + 5 = (6x^3 + 12x^3 - 14x^3) + (5x - 7x - 6x) + (-1 + 5)$
$= 4x^3 - 8x + 4$

- Développe, réduis et ordonne suivant les puissances décroissantes de x les expressions :
$(2x - 1)(3x + 2) - x(3x - 1)$; $2(x^2 - 1) + 4x - 5x(x + 3) - (x - 1)(x + 1)$.

- Calcule la valeur numérique du polynôme $4x^3 - 8x + 4$ pour $x = -3$.

3.2 FRACTIONS RATIONNELLES

Présentation

numérateur → $x^2 + 4x$
dénominateur → x^2+1

$$\underbrace{\frac{x^2 + 4x}{x^2+1}}_{\text{fraction rationnelle}}$$

On considère l'expression littérale : $\frac{x^2 + 4x}{x^2+1}$;

c'est une **fraction rationnelle.**
$x^2 + 4x$ est son **numérateur**
$x^2 + 1$ est son **dénominateur.**

Condition d'existence d'une valeur numérique

On considère l'expression littérale B : $B = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - x}$.

On peut factoriser le numérateur et le dénominateur de B. On obtient : $B = \frac{x^2(x + 5)}{x(x - 1)}$.

- Explique pourquoi les seules valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer une valeur numérique de B sont 0 et 1.

On dit que **la condition d'existence d'une valeur numérique** de B est : $x \neq 0$ *et* $x \neq 1$.

- Calcule la valeur numérique de B pour chacune des valeurs suivantes de x : 3 ; – 3 ; – 5 ; 5.

Simplifier une fraction rationnelle

On veut trouver une écriture plus simple de l'expression littérale B : $B = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - x}$.

On factorise le numérateur et le dénominateur de B : $B = \frac{x^2(x + 5)}{x(x - 1)} = \frac{x^2}{x} \times \frac{x + 5}{x - 1}$

Pour x différent de zéro et différent de 1, on a : $B = x \times \frac{x + 5}{x - 1} = \frac{x(x + 5)}{x - 1}$

On dit que la fraction rationnelle a été **simplifiée par** x.
On écrit :

Pour $[\, x \neq 0$ *et* $x \neq 1 \,]$ $B = \frac{x(x + 5)}{x - 1}$

MÉTHODE

Pour simplifier une fraction rationnelle,
on peut procéder comme suit :

- on factorise le numérateur et le dénominateur,
- on détermine la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle,
- on simplifie la fraction rationnelle par chacun des facteurs communs figurant au numérateur et au dénominateur,
- on écrit la fraction rationnelle simplifiée, précédée de la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle.

EXERCICES

3.a Trouve la condition d'existence d'une valeur numérique de chacune des fractions rationnelles A et B.
$A = \frac{x}{x^2 + 1}$; $B = \frac{2}{4x^2 - 49}$

3.b Simplifie les fractions rationnelles A, B et C.
$A = \frac{4x^2 - 10x + 25}{2x^2 - 5x}$; $B = \frac{9x^2 + 6x + 1}{1 - 9x^2}$; $C = \frac{144x - 4x^3}{x^3 + 12x^2 + 36x}$
Calcule la valeur numérique de A pour $x = 5$ et pour $x = -2{,}5$.
Calcule la valeur numérique de C pour $x = 6$ et pour $x = 0{,}01$

ENTRAÎNEMENT

1 QUOTIENTS

1 a désigne un nombre différent de 0.
Calcule a lorsque :

1) $\frac{a}{6} = \frac{9}{18}$ *2)* $\frac{3}{a} = \frac{4}{12}$ *3)* $\frac{6}{7} = \frac{a}{84}$ *4)* $\frac{4}{13} = \frac{20}{a}$

2 Calcule les sommes, produits et quotients suivants :

1) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ *2)* $\frac{2}{5} + \frac{9}{4}$ *3)* $\frac{2}{7} + \frac{7}{4}$
4) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ *5)* $\frac{2}{5} \times \frac{9}{4}$ *6)* $\frac{2}{7} \times \frac{7}{4}$
7) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ *8)* $\frac{2}{5} : \frac{9}{4}$ *9)* $\frac{2}{7} : \frac{7}{4}$

2 CALCUL LITTÉRAL

3 a désigne un nombre différent de 0.
Écris plus simplement :

$m = a^{-2} \times a^5$; $n = a^{-2} \times a^{-3}$; $p = a^{-7} \times a^4$
$q = (a^{-2})^{-3}$; $r = (a^{-3})^2$; $s = (a^4)^{-2}$
$t = \frac{a^{-2}}{a^{-3}}$; $u = \frac{a^{-3}}{a^{-4}}$; $v = \frac{a^4}{a^{-5}}$

4 a désigne un nombre .
1) Développe, puis réduis :
$A = (3a - 2)(4a + 1) - 5a^2$
$B = (-2a + 3)(5a - 7) + 10a^2$
$C = (-a - 6)(-3a + 8) - 2a^2 + 48$
$D = -(-4a - 1)(-2a + 9) + 6a^2 - 8$
2) Calcule la valeur numérique de A, B, C et D pour $a = -2$.

5 a désigne un nombre .
1) Développe, puis réduis :
$A = (3a - 5)^2$; $B = (-2a - 4)^2$; $C = (4a - \frac{5}{2})^2$; $D = -(2a - 3)(2a + 3)$
2) Calcule la valeur numérique de A, B, C et D pour $a = -3$.

6 a désigne un nombre.
1) Développe, puis réduis :
$A = 2(3a - 2) - 3a(a + 1)$
$B = (a + 2)(a - 1) - (a - 3)^2$
$C = (\frac{2}{3}a - 3)^2$; $D = 2(\frac{3}{2}a - \frac{1}{4})^2$
2) Calcule la valeur numérique de A, B, C et D pour $a = -4$.

7 a et b désignent des nombres .
Factorise :
$A = 2a(a - 1) + 3(a - 1)$
$B = 3a(a - 2) - 4a(a - 2)$
$C = -a(2a - 3) - 2a(2a - 3)$
$D = 4a(3b - \frac{1}{2}) - 3a(6b - 1)$

8 a désigne un nombre .
Factorise :
$A = 4a^2 + 12a + 9$
$B = 9a^2 - 12a + 4$
$C = 36 - 12a + a^2$
$D = (a + 2)^2 - 16$
$E = 36 - (2a - 3)^2$
$F = \frac{16}{25} - (\frac{4}{9}a - 5)^2$

9 a désigne un nombre .
Factorise :
$A = a - a^3$; $B = a^5 - a^3$
$C = 9a^2 - 16 + (a + 2)(3a - 4)$
$D = 25 - 4a^2 - (5 - 2a)(2a - 5)$
$E = a^2 - 6a + 9 - 2a(a - 3)$
$F = a^2 - 4a + 4 - 3a(2 - a)$

10 Calcule rapidement et sans calculette :
$21^2 - 19^2$; $51^2 - 49^2$; $81^2 - 79^2$; $101^2 - 99^2$;
$21^2 - 20^2$; $51^2 - 50^2$; $81^2 - 80^2$; $101^2 - 100^2$;
$336^2 - 335^2$; $526^2 - 525^2$; $824^2 - 823^2$.

3 EXEMPLES D'EXPRESSIONS LITTÉRALES

11 x désigne un nombre.
Réduis et ordonne :
$A = 3x^2 - 7x^2 + 6x^2 - 5x^2$
$B = 4x^3 - x + 49 - 3x^3 - 3x^2 + 4x - 51$
$C = \frac{2}{5}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{7} - \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{17}{7}$
$D = 1{,}1x^4 + 3{,}4x^3 - 2{,}71 - 0{,}9x^4 - 4{,}5x^2 + 1{,}71 - 1{,}4x^3 + 5x^2$

12 y désigne un nombre. Réduis :
$A = 3y^3 \times 7y^2$
$B = (-\frac{2}{3}y^2) \times (\frac{9}{5}y^4)$
$C = 0{,}2y^4 \times (-5y)$

$D = (-\frac{4}{5}y) \times (-\frac{5}{8}y^2) \times (-4y^3)$
$E = (-0{,}01y^3) \times (-5y^7) \times 100y^{-3}$

13 x désigne un nombre.
a) Développe, réduis et ordonne chacune des expressions littérales ci-dessous.
b) Donne ensuite le degré du polynôme obtenu.
1) $(x - 7)(3x + 2)$
2) $(x - 2)(2x - 1) - x(x^2 - 3)$
3) $(3x - 1)(x^2 + 4) - (2x - 5)(x - 7)$
4) $x(x^2 - 1) - x(x^2 + 1) + (x - 1)^2$
5) $(\frac{2}{3}x - 4)(\frac{9}{4}x + 2) - \frac{6}{4}x^2$
c) Calcule la valeur numérique de la première expression pour $x = 7$; $x = 0$; $x = -\frac{2}{3}$; $x = 5$.

14 x désigne un nombre .
1) Pour chacune des fractions rationnelles ci-dessous :
- factorise son numérateur et son dénominateur ;
- détermine la condition d'existence d'une valeur numérique ;
- simplifie l'expression littérale obtenue.

1) $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ *2)* $\frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ *3)* $\frac{x^2 + x}{x^3 - x^2}$
4) $\frac{12x^2 - 3}{8x + 4}$ *5)* $\frac{x^2 - 10x + 25}{2x - 10}$ *6)* $\frac{\frac{14}{3}x + 28}{\frac{20}{9}x^2 - 80}$

2) Calcule ensuite la valeur numérique de chacune de ces fractions rationnelles pour $x = 2$; $x = 3$.

APPROFONDISSEMENT

15 Trouve une méthode pour calculer rapidement et sans calculette :
35^2 ; 45^2 ; 55^2 ; 65^2 ; 85^2 ; 95^2 ; 125^2 ; 145^2.

16 n désigne un nombre entier naturel différent de 0.
1) $2n$ désigne donc un nombre pair, quelle sera l'écriture du nombre pair qui le précède ? qui le suit ?
2) $2n + 1$ désigne donc un nombre impair, quelle sera l'écriture du nombre impair qui le précède ? qui le suit ?

17 *1)* Étudie si les nombres suivants sont paires ou impaires :
– la somme de deux nombres pairs
– la somme de deux nombres impairs
– la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair
– le produit de deux nombres pairs
– le produit de deux nombres impairs
– le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair

2) Complète les tableaux ci-dessous par pair ou impair :

+	pair	impair
pair		
impair		

×	pair	impair
pair		
impair		

18 *1)* Deux nombres pairs consécutifs ont pour somme 138.
Quels sont ces deux nombres ?
2) Deux nombres impairs consécutifs ont pour somme 136.
Quels sont ces deux nombres ?
3) Un nombre pair et le nombre impair qui le suit ont pour somme 157.
Quels sont ces deux nombres ?

19 *1)* Deux nombres pairs consécutifs ont pour produit 168.
Quels sont ces deux nombres ?
(Le plus petit des deux nombres pairs pourra être désigné par 2n – 2 avec n ≥ 1)
2) Deux nombres impairs consécutifs ont pour produit 323.
Quels sont ces deux nombres ?
(Le plus petit des deux nombres impairs pourra être désigné par 2n – 1 avec n ≥ 1)

20 *1)* Donne une écriture générale de trois nombres entiers naturels impairs consécutifs.
2) Trouve trois nombres entiers naturels impairs consécutifs dont la somme est 1 071.

21 Donne une expression générale d'un multiple de 5, d'un multiple de 13.
(On pourra désigner un nombre entier naturel par m).

22 m désigne un nombre entier naturel .
Donne la traduction mathématique :

EXERCICES

• du triple de m, augmenté de $\frac{1}{4}$;
• du double de m, diminué de $\frac{3}{7}$;
• du carré de m, diminué de 1 ;
• du carré de m, augmenté de 3.

23 m désigne un nombre entier naturel.
Donne la traduction mathématique de chacune des phrases suivantes :
• le triple de m, diminué de $\frac{1}{4}$, est plus grand que $\frac{2}{3}$;
• le double de m, augmenté de $\frac{3}{7}$, est plus petit que $\frac{3}{7}$;

24 *1)* Exécute le programme de calcul suivant :
• Choisis un nombre entier naturel différent de 0 ;
• Calcule le carré de ce nombre ;
• Retranche 1.
• Effectue le produit du nombre entier précédant le nombre choisi par celui qui suit le nombre choisi.
Que constates-tu ?
2) Exécute le même programme avec un autre nombre entier naturel. Que constates-tu ?
3) Émets une conjecture et démontre-la.

25 *1)* Trouve une méthode simple pour effectuer le produit de deux nombres de deux chiffres qui se terminent par 1.
2) Calcule rapidement : 41×51 ; 31×91 ; 61×81 ; 71×21.

26 *1)* Explique pourquoi le produit de deux nombres se terminant par 1, 5 ou 6 se termine respectivement par 1 ; 5 ; 6.
2) Explique pourquoi le produit de deux nombres se terminant par 76 se termine par 76.

27 Trouve trois nombres entiers naturels pairs consécutifs représentant les mesures des côtés d'un triangle rectangle.

28 ***Un jeu avec des nombres***
1) Exécute le programme suivant :
• Choisis un premier nombre de trois chiffres non terminé par zéro et tel que la différence entre le chiffre des centaines et le chiffre des unités soit plus grande que 1.
• Permute le chiffre des unités et le chiffre des centaines de ce premier nombre. Tu obtiens un deuxième nombre.
• Effectue la différence entre le plus grand nombre et le plus petit nombre. Tu obtiens un troisième nombre.
• Permute le chiffre des unités et le chiffre des centaines du troisième nombre. Tu obtiens un quatrième nombre.
• Ajoute le troisième et le quatrième nombre.
Quel nombre trouves-tu ?
2) Exécute le même programme avec un autre nombre du même type. Que constates-tu ?

29 a et b sont des nombres entiers naturels différents de 0 tels que $a > b$.
1) Démontre que : $a^2 = (a - b)(a + b) + b^2$.
2) Calcule rapidement 996^2 et 988^2.

30 Deux cyclistes décident de parcourir une distance de 95 km. Le moins rapide part le premier à 8 h 35 min.
L'autre, plus expérimenté et deux fois plus rapide part un peu plus tard, rattrape le premier à mi-parcours et arrive à destination 95 min avant lui.
À quelle heure était-il parti ?
L'exercice 34 est extrait de « Les jeux Mathématiques du Sahel Dimanche 1994-1995 / Association Nigérienne de jeux mathématiques – Fascicule n°6 / BP 13 180 NIAMEY ».

RECHERCHE

31 Des cubes ... et des pyramides
Khéops, le grand roi d'Égypte, jouait lorsqu'il était petit, avec des cubes. Il construisait, cela ne surprendra personne, des pyramides de base carrée, dont chaque cube, pour assurer la stabilité de l'édifice, reposait sur quatre cubes de l'étage précédent. Le jeu favori du futur roi, consistait à construire de cette façon, la plus haute pyramide possible, puis, avec les cubes restants, à en construire une autre, toujours la plus haute possible, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus de cube.
Aujourd'hui, Khéops dispose de 2 003 cubes. Combien pourra-t-il construire de pyramides, et quelle sera la hauteur de chacune d'elle ?

1 Racines carrées

Calculer le côté d'un carré d'aire donnée numériquement, ou construire le côté d'un carré d'aire donnée géométriquement, sont deux aspects, l'un numérique, l'autre géométrique d'un très vieux problème.

Tablettes babyloniennes


D.R.

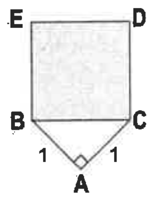
Sur cette tablette, on peut lire l'équivalent de : $\sqrt{2} \approx 1{,}414\ 222$

SOMMAIRE

1 Racine carrée

1.1 DÉFINITION DE LA RACINE CARRÉE

Activité



On sait construire un carré dont l'aire est 4 cm², 9 cm², 25 cm², …
On veut obtenir un carré dont l'aire est 2 cm².
Pour cela :
on construit un triangle ABC rectangle isocèle en A, de côté 1 cm ;
on construit le carré BCDE, de côté [BC].
• Démontre que l'aire du carré BCDE est égale à 2 cm².
On admet que chaque nombre positif est le carré d'un seul nombre positif.

DÉFINITION

On appelle racine carrée du nombre positif a, le nombre positif dont le carré est a.

On note : $\sqrt{a}$.
On lit : racine carrée de a. Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé **radical**.

Exemples : $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{4\,900} = 70$; $\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

Conséquences de la définition

• **a et b sont des nombres positifs :**

$\sqrt{a} = b$ ***équivaut à*** $a = b^2$

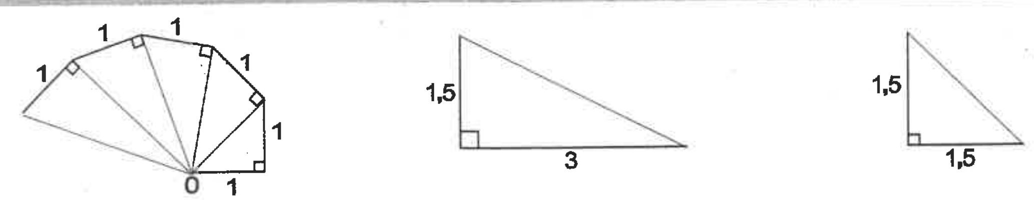
$\sqrt{a} \geq 0$; $(\sqrt{a})^2 = a$

• **La racine carrée de 0 est égale à 0 : $\sqrt{0} = 0$**

1.2 CONSTRUCTION D'UN SEGMENT DE LONGUEUR $\sqrt{a}$

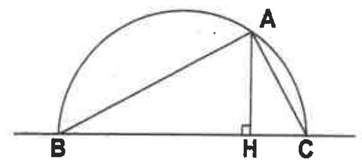
Dans ce paragraphe, l'unité de longueur est le centimètre.

Activité 1 : Utilisation de la propriété de Pythagore



• Pour chacune des figures prédédentes, marque la mesure de chaque segment tracé en couleur. Justifie.
• Donne un programme de construction d'un segment de mesure $\sqrt{7}$, d'un segment de mesure $\sqrt{41}$ et d'un segment de mesure $\sqrt{33}$. (On remarquera que : $41 = 25 + 16$; $33 = 49 - 16$.)

Activité 2 : utilisation des triangles semblables



• Démontre que, dans le triangle ABC rectangle en A, la hauteur [AH] passant par le sommet A de l'angle droit, détermine des triangles semblables :

$\dfrac{ABC}{HBA}$ $\dfrac{ABC}{HAC}$ $\dfrac{HAC}{HBA}$

• Justifie alors que :

$BA^2 = BH \times BC$; $CA^2 = CH \times CD$ $HA^2 = HB \times HC$

• Donne un programme de construction d'un segment de mesure $\sqrt{28}$ et d'un segment de mesure $\sqrt{15}$. (On remarquera que : $28 = 4 \times 7$; $15 = 5 \times 3$.)

EXERCICES

1.a En remarquant que : $18 = 9 + 9$, $18 = 3 \times 6$, et $18 + 18 = 36$, donne trois constructions différentes d'un segment de mesure $\sqrt{18}$.

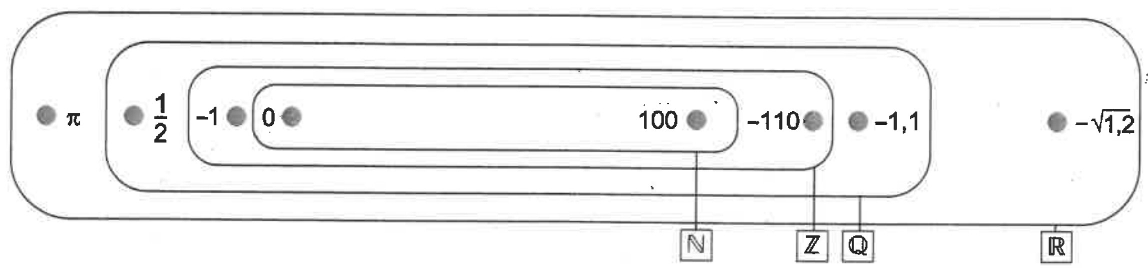
1.b n est un nombre entier naturel. Donne un programme de construction d'un segment de mesure $\sqrt{2n+1}$ en utilisant l'égalité remarquable $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

1.3 ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. (On démontre et nous admettons qu'il n'existe pas de fraction égale à $\sqrt{2}$.) On dit que $\sqrt{2}$ est un **nombre irrationnel.**

Un nombre qui n'est pas un nombre rationnel est appelé **nombre irrationnel.**
L'ensemble formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé ensemble des **nombres réels**, et noté $\mathbb{R}$.

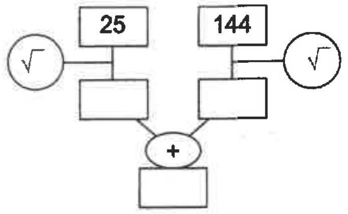
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

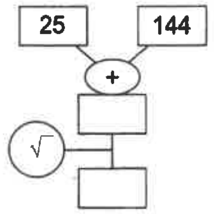


2 Opérations et racines carrées

2.1 SOMMES ET RACINES CARRÉES

Activité





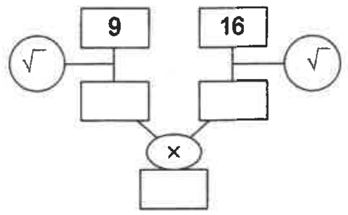
• Recopie, puis complète les organigrammes ci-contre. Compare les résultats obtenus.

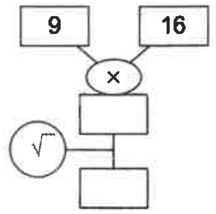
On admet que :

a et b étant des nombres plus grands que 0, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

2.2 PRODUITS, QUOTIENTS ET RACINES CARRÉES

Activité





• Recopie, puis complète les organigrammes ci-contre. Compare les résultats obtenus.

• Démontre les propriétés suivantes.
Pour cela on pourra comparer :
$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$ et $(\sqrt{a\times b})^2$; $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$

PROPRIÉTÉS

a et b sont des nombres réels positifs. On a :

$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$; $\sqrt{\frac{b}{a}}$ et $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. $(a\neq 0)$

Exemples

$\sqrt{9\times 36} = \sqrt{9}\times\sqrt{36} = 3\times 6 = 18$

$\sqrt{5}\times\sqrt{5\times 49} = \sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{49} = 5\times 7 = 35$

$\sqrt{20} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$

$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\frac{45}{75}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

EXERCICES

2.a Écris plus simplement : $\sqrt{16\times 25}$; $\sqrt{4\times 49}$; $\sqrt{36\times 64}$; $\sqrt{81\times 100}$

2.b Écris plus simplement : $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$; $\sqrt{7}\times\sqrt{7}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{12{,}5}$; $\sqrt{7{,}2}\times\sqrt{5}$; $\sqrt{10}\times\sqrt{250}$; $\sqrt{25}\times\sqrt{625}$.

2.c Écris plus simplement les nombres suivants : $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{3}}$

2.3 RACINES CARRÉES ET PUISSANCES

Activité

• $\sqrt{3^{122}} = 3^{61}$; Justifie.
• $\sqrt{2^{17}} = 2^8\sqrt{2}$; Justifie.

Plus généralement,

a étant un nombre réel positif et n un nombre entier relatif : $\sqrt{a^{2n}} = a^n$, $\sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{a^n}\times\sqrt{a}$

Exemple 1

$a = \sqrt{10^7}$	$b = \sqrt{125}$	$c = \sqrt{1{,}21}$	$d = \sqrt{0{,}005}$
$a = \sqrt{10^6\times 10}$	$b = \sqrt{25\times 5}$	$c = \sqrt{121\times 10^{-2}}$	$d = \sqrt{50\times 10^{-4}}$
$a = \sqrt{10^6}\times\sqrt{10}$	$b = \sqrt{25}\times\sqrt{5}$	$c = \sqrt{11^2\times(10^{-1})^2}$	$d = \sqrt{2\times 25\times(10^{-2})^2}$
$a = \sqrt{(10^3)^2}\times\sqrt{10}$	$b = \sqrt{5^2}\times\sqrt{5}$	$c = \sqrt{11^2}\times\sqrt{(10^{-1})^2}$	$d = \sqrt{2}\times\sqrt{25}\times\sqrt{(10^{-2})^2}$
$a = 10^3\times\sqrt{10}$	$b = 5\sqrt{5}$	$c = 11\times 10^{-1} = 1{,}1$	$d = \sqrt{2}\times 5\times 10^{-2} = 0{,}05\sqrt{2}$

Exemple 2

a, b et c sont des nombres positifs.

$\sqrt{a^3b^{13}c^{15}} = \sqrt{a^2b^{12}c^{14}abc} = ab^6c^7\sqrt{abc}$; $\sqrt{a^9b^{20}c^{15}} = \sqrt{a^8b^{20}c^{14}ac} = \sqrt{a^4b^{10}c^7ac}$.

$$\frac{\sqrt{a^3b^3c^7}}{\sqrt{a^5b^2c^4}} = \frac{\sqrt{a^2b^2c^6\times bc}}{\sqrt{a^4b^2c^4\times a}} = \frac{abc^3\sqrt{bc}}{a^2bc^2\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{bc}}{a\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{abc}}{a^2}$$

EXERCICES

2.d Écris plus simplement : $\sqrt{25}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{128}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{243}$; $\sqrt{3\,125}$; $\sqrt{16\,807}$

2.e Écris plus simplement a, b et c sont des nombres positifs.

$\sqrt{a^5b^6c^{30}}$; $\sqrt{a^{34}b^{57}c^{175}}$; $\frac{\sqrt{a^{75}b^{552}c^{127}}}{\sqrt{a^{33}b^{133}c^{355}}}$.

3 Calculs avec des racines carrées

3.1 DÉVELOPPER ET RÉDUIRE – FACTORISER

Exemple 1

$a = \sqrt{27} - \sqrt{3} - \sqrt{12} - \sqrt{2} \times \sqrt{8} + \dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

$a = \sqrt{9} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{2 \times 8} + \sqrt{\dfrac{75}{3}}$

$a = \underbrace{3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{3}} - \sqrt{16} + \sqrt{25}$

$a = \quad 0 \quad -4 + 5$

$a = 1$

$b = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$

$b = (3\sqrt{2})^2 + 12\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 8(\sqrt{3})^2$

$b = \quad 18 \quad + \quad 6\sqrt{6} \quad - \quad 24$

$b = -6 + 6\sqrt{6}$

$b = 6(\sqrt{6} - 1)$

Exemple 2

$x^2 - 35 = x^2 - (\sqrt{35})^2 = (x - \sqrt{35})(x + \sqrt{35})$

$17 - 3a^2 = (\sqrt{17} + a\sqrt{3})(\sqrt{17} - a\sqrt{3})$

$8 + 4a\sqrt{2} + a^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2 \times 2\sqrt{2} \times a + a^2 = (2\sqrt{2} + a)^2$

EXERCICES

3.a Écris plus simplement :
$\sqrt{600} - \sqrt{24}$; $\sqrt{14} \times \sqrt{21}$; $3\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$; $\sqrt{98} - \sqrt{18} + 6\sqrt{2}$.

3.b Développe et réduis :
$(4\sqrt{3} - 7)(4\sqrt{3} + 7)$;
$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$;
$(\sqrt{1\,996} - \sqrt{1\,995})(\sqrt{1\,996} + \sqrt{1\,995})$;
$(\sqrt{27} - \sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$;
$(13\sqrt{30} - 5\sqrt{210})^2$; $(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3})^2$;

3.c Factorise :
$3a^2 - 75$; $3a^2 - 8a\sqrt{3} + 16$; $125a^2 - 8b^2$; $a(5 + \sqrt{2}) - (5\sqrt{2} + 2)$.

3.2 ÉCRIRE UN QUOTIENT SANS RADICAL AU DÉNOMINATEUR

Expressions conjuguées

• *Développe et réduis les nombres réels a, b et c.*
$a = (\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)$; $b = (2 - 5\sqrt{3})(2 + 5\sqrt{3})$; $c = (5\sqrt{7} - 6\sqrt{5})(5\sqrt{7} + 6\sqrt{5})$

Les expressions $\sqrt{7} + 2$ et $\sqrt{7} - 2$ sont des **expressions conjuguées.** Leur produit peut s'écrire sans radical.

De même, $2 - 5\sqrt{3}$ et $2 + 5\sqrt{3}$; $5\sqrt{7} - a\sqrt{5}$ et $5\sqrt{7} + a\sqrt{5}$ sont des expressions conjuguées.

Écriture de quotients sans radical au dénominateur

• Cherchons une écriture sans radical au dénominateur, de chacun des nombres suivants :
$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{3}{\sqrt{19} + 4}$; $\dfrac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par : $\sqrt{3}$

$$\frac{3}{\sqrt{19} + 4} = \frac{3 \times (\sqrt{19} - 4)}{(\sqrt{19} - 4)(\sqrt{19} + 4)} = \frac{3 \times (\sqrt{19} - 4)}{19 - 16} = \sqrt{19} - 4$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur : $(\sqrt{19} - 4)$.

$$\frac{8}{\sqrt{5} - \sqrt{17}} = \frac{8(\sqrt{5} + \sqrt{17})}{(\sqrt{5} - \sqrt{17})(\sqrt{5} + \sqrt{17})} = \frac{8(\sqrt{5} + \sqrt{17})}{5 - 17} = \frac{-2(\sqrt{5} + \sqrt{17})}{3}$$

Nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur : $(\sqrt{5} - \sqrt{17})$.

EXERCICE

3.c Trouve une écriture sans radical au dénominateur de chacun des quotients suivants :
$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{5}{2 - \sqrt{7}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$; $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{11}}$

ENTRAÎNEMENT

1 RACINE CARRÉE

1 x est un nombre réel positif. Recopie, puis complète chacun des tableaux suivants :

x		0,16	0,4		1,6	
x^2	0,09			0,49		2,25

x	10^2		10^{-1}		$\sqrt{3}$	
x^2		10^2		10^{-4}		17

2 Calcule :

$\sqrt{36}$; $\sqrt{0,36}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{1,44}$;
$\sqrt{196}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{0,25}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{6,25}$.

3 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle isocèle en B tel que AB = 4. Calcule AC .

4 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en B tel que mes $\widehat{A} = 30°$ et AB = 6. Calcule BC et AC.

5 L'unité de longueur est le centimètre.
ABCD est un carré tel que AC = 6.
Calcule le côté de ce carré.

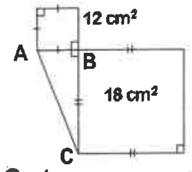
6 Calcule le rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté 2 cm.

7 L'unité de longueur est le cm.
1) Construis un segment de mesure $\sqrt{2}$; de mesure $2\sqrt{3}$.
2) Sachant que $10 = 3^2 + 1^2$, construis un segment de mesure $\sqrt{10}$.
3) Sachant que $21 = 5^2 - 2^2$, construis un segment de mesure $\sqrt{21}$.
4) Construis un segment de mesure $\sqrt{37}$; de mesure $\sqrt{32}$.

2 OPÉRATIONS ET RACINES CARRÉES

8 Écris plus simplement :
1) $\sqrt{4\times64}$; $\sqrt{9\times16}$; $\sqrt{16\times49}$; $\sqrt{25\times121}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{32}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{72}$; $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$; $\sqrt{23}\times\sqrt{23}$; $\sqrt{4}\times\sqrt{6,25}$
2) $2\sqrt{7}\times5\sqrt{28}$; $\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{81}{7}}$;
3) $\sqrt{80}\times\sqrt{20}$; $\sqrt{45}\times\sqrt{60}\times\sqrt{12}$.

9 Calcule les longueurs des côtés du triangle ABC.



Écris chacun des résultats sous une forme réduite contenant le symbole $\sqrt{\ }$.

10 Écris les nombres réels ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers naturels et b est le plus petit possible :
1) $\sqrt{125}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{164}$; $\sqrt{275}$.
2) $2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{40}$; $\sqrt{75}\times\sqrt{32}$; $3\sqrt{27}\times2\sqrt{15}$;
3) $\sqrt{75}+\sqrt{48}$; $\sqrt{32}-\sqrt{8}$; $(\sqrt{18})^2\times\sqrt{2}$;
$3\sqrt{8}+5\sqrt{18}$; $13\sqrt{12}-5\sqrt{75}$; $\sqrt{98}\times\sqrt{\frac{1}{2}}$.

11 Écris les nombres réels ci-dessous sous la forme $-\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a}$ où a est un nombre entier naturel :
$-3\sqrt{3}$; $-10\sqrt{6,5}$; $2\sqrt{5}$; $7\sqrt{11}$; $3\sqrt{10}$; $6\sqrt{20}$.

12 Calcule :
$\sqrt{10^6}$; $\sqrt{10^{-8}}$; $\sqrt{100}-\sqrt{10^{-2}}$.

13 Sachant que $234^2 = 54\,756$, trouve parmi les écritures ci-dessous celles qui désignent un nombre décimal :
$\sqrt{5\,475,6}$; $\sqrt{54\,756}$; $\sqrt{547,56}$; $\sqrt{54,756}$; $\sqrt{5,475\,6}$;
$\sqrt{0,054\,756}$; $\sqrt{0,547\,56}$; $\sqrt{5\,475\,600}$.

14 Calcule :
$\sqrt{10^8}$; $\sqrt{10^{-6}}$; $2\sqrt{10^{10}}$; $\sqrt{9^3}$; $\sqrt{16^3}$; $\sqrt{25^3}$; $\sqrt{1000}$;
$-3\sqrt{10^{-12}}$; $\sqrt{1,96}$; $\sqrt{2,25}$; $-2\sqrt{256}$; $\sqrt{0,0036}$;
$\sqrt{0,0001}$; $\sqrt{0,04}$;
$-3\sqrt{0,028\,9}$; $-3\sqrt{0,001\,6}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{0,32}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{4,5}$;
$\sqrt{2}\times\sqrt{60,5}$; $\sqrt{3}\times\sqrt{0,75}$; $\sqrt{0,06}\times4\sqrt{5}$;
$\sqrt{16}+\sqrt{0,16}+\sqrt{0,0016}$; $\sqrt{64}-\sqrt{0,64}+\sqrt{0,0064}$;
$\sqrt{6^3\times75}$; $\sqrt{2^2\times3^4}$; $\sqrt{2^4\times3^6\times5^2}$; $\sqrt{2^3\times3^3\times6^3}$.

15 a et b sont des nombres entiers naturels.
Écris plus simplement :
1) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\sqrt{\frac{49}{81}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{32}{50}}$
$\sqrt{\frac{12}{27}}$; $\sqrt{\frac{5}{36}}$; $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}}$; $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{45}}$; $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{80}}$
2) $\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{5}{49}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}\times\sqrt{\frac{100}{147}}$; $\sqrt{\frac{49\times16}{25}}$

16 Écris plus simplement :
$a = \sqrt{\frac{3\,600\times0,04}{11^2}}$ $b = \sqrt{\frac{0,000\,1\times36}{49}}$
$c = \frac{\sqrt{0,32}\times\sqrt{0,2}}{\sqrt{3,6}}$

17 Écris plus simplement :
$\sqrt{10^5}$; $\sqrt{10^{-3}}$; $\sqrt{0,049}$; $\sqrt{0,001\,69}$; $-2\sqrt{0,000\,8}$;
$\sqrt{10^{-7}}$; $\sqrt{10^7}$; $-2\sqrt{10^{-5}}$; $-3\sqrt{10^{-9}}$; $\sqrt{0,007}$.

18 a, b et c sont des nombres réels positifs.
Écris plus simplement :
$\sqrt{a^2b^3c^4}$; $\sqrt{a^4b^9c^7}$; $-2\sqrt{a^3b^5c^6}$;
$-2a\sqrt{a^5b^4c^8}$; $-5a^2\sqrt{a^{-5}b^6c^{-8}}$.

19 Décompose 1 296 en produit de facteurs premiers. Calcule $\sqrt{1\,296}$.

3 CALCULS AVEC DES RACINES CARRÉES

20 Écris plus simplement :
$a = 2\sqrt{27}-\sqrt{147}+\sqrt{12}$
$b = 61\sqrt{5}-12\sqrt{7}-49\sqrt{5}-12$
$c = \frac{1}{2}\sqrt{5}-2(1-\sqrt{5})-\frac{3}{2}\sqrt{5}$
$d = 2\sqrt{11}-3\sqrt{7}-(6\sqrt{11}-9\sqrt{7})$
$e = 2\sqrt{16}-6\sqrt{7}-\sqrt{81}-\sqrt{700}$

21 Développe, puis écris plus simplement :
$a = \sqrt{3}(4+2\sqrt{3})$ $d = (2\sqrt{7}-4)^2$
$b = \sqrt{5}(2\sqrt{5}+3\sqrt{15})$ $e = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$
$c = (2+3\sqrt{5})^2$ $f = (2\sqrt{5}-3\sqrt{7})^2$
$g = (3\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$
$h = (1+7\sqrt{5})(5-3\sqrt{7})$
$i = (3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})$
$j = (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

22 Écris plus simplement :
$a = \sqrt{1\,995\times1\,996+1\,996}$
$b = 3\sqrt{5}\times\sqrt{7}+2\sqrt{5}\times\sqrt{7}$
$c = \sqrt{48}-\sqrt{54}+\sqrt{24}$
$d = (2\sqrt{7}-3\sqrt{3})(3\sqrt{3}+2\sqrt{7})$
$e = (2\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)$
$f = (\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

23 x est un nombre réel positif.
1) Développe et réduis $(3-\sqrt{2})^2$.
2) Factorise : $x^2-(11-6\sqrt{2})$.

24 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que : $AB = 7-\sqrt{5}$;
$BC = 7+\sqrt{5}$ et $AC = 6\sqrt{3}$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

25 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que : $AB = 3+2\sqrt{3}$;
$AC = 3\sqrt{3}-2$ et $BC = 2\sqrt{13}$.
Démontre que le triangle ABC est rectangle.

26 x est un nombre réel.
Factorise les expressions littérales ci-dessous :
x^2-25 ; x^2-11 ; $x^2-\frac{2}{3}$; $x^2-\frac{4}{3}$
$x^2-\frac{4}{9}$; $4x^2-18$; x^2-7 ; $5x^2-13$.

27 x est un nombre réel .
Factorise les expressions littérales ci-dessous :

$x^2-2\sqrt{3}x+3$	$9x^2+12\sqrt{2}x+8$
$4x^2+4\sqrt{5}x+5$	$(x+2)^2-4$
$x^2-4\sqrt{7}x+28$	$(x-2)^2-5$

28 Écris les nombres réels ci-dessous sans le symbole $\sqrt{\ }$ au dénominateur :

$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5+\sqrt{2}}$	$\frac{-2}{-1-\sqrt{5}}$
$\frac{3}{\sqrt{7}}$	$\frac{1}{5-\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{-3}{\sqrt{2}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$
$\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}-\sqrt{11}}$	$\frac{\sqrt{2}-5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

APPROFONDISSEMENT

29 Écris les nombres réels ci-dessous sans le symbole $\sqrt{\ }$ au dénominateur :
$\sqrt{\frac{9}{5}}+\sqrt{\frac{16}{5}}+\sqrt{\frac{36}{5}}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}\times\sqrt{\frac{6}{63}}$

30 Écris plus simplement :
$$\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

EXERCICES

31 Écris la longueur de la diagonale d'un carré de 27 m de côté sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est un nombre entier naturel le plus petit possible.

32 a et b sont des nombres réels.
Quelles sont les conditions pour que les écritures ci-dessous désignent des nombres réels ?

$\frac{a}{b}$; $\sqrt{(a)^2}$; $\sqrt{a-b}$

33 Complète les égalités suivantes :
1) $(\sqrt{3} + \ldots\ldots\ldots)^2 = 4\sqrt{3} + 7$
2) $(\sqrt{2} - \ldots\ldots\ldots)^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

34 x et y sont des nombres réels positifs.
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = x$ et $AC = y$. [AM] est une hauteur.
Exprime AM en fonction de x et y.

35 Trouve le plus petit nombre entier naturel a différent de 0 tel que $605a$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

36 x et y sont des nombres réels plus grands que 0. L'aire totale d'un cube d'arête x est le double de l'aire totale d'un cube d'arête y.
Exprime x en fonction de y.

37 Le vieux ARRA veut partager équitablement 90 000 francs entre tous ses petits-enfants de façon que chacun de ceux-ci reçoive autant de pièces de 100 francs qu'il y a de petits-enfants.
Combien le vieux ARRA a-t-il de petits-enfants ?
Quelle est la somme d'argent que recevra chacun des petits-enfants ?

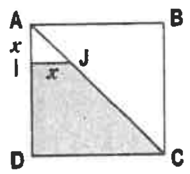
38 *1)* Trois points A, B et C sont tels que $AB = \sqrt{99}$, $BC = \sqrt{176}$ et $AC = \sqrt{275}$.
Ces points A, B et C sont-ils alignés ?
2) Trois points M, P et S sont tels que $MP = \sqrt{272}$, $PS = \sqrt{425}$ et $MS = \sqrt{1\,377}$.
Ces points M, P et S sont-ils alignés ?

39 L'unité de longueur est le centimètre.
Les dimensions d'un rectangle sont respectivement $2\sqrt{3} + 2$ et $2\sqrt{3} - 2$.
1) Calcule le périmètre de ce rectangle.
2) Calcule son aire.
3) Calcule ensuite le diamètre du cercle circonscrit à ce rectangle.

40 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle équilatéral de côté 2 et [AH] l'une de ses hauteurs.
1) Construis les points S et T tels que AHST soit un carré.
(deux constructions possibles)
2) a est un nombre réel positif tel que :
mes $\widehat{TBS} = a°$. Calcule tan $a°$.
Trouve un encadrement de la mesure en degrés de cet angle par deux nombres entiers naturels consécutifs.
3) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{TAB}$, puis détermine un encadrement de l'angle $\widehat{ATB}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs.

41 **Le nombre d'or**
ABCD est un carré de côté x.
Le point O est le milieu du côté [CD].
Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon OA coupe la demi-droite [DC) au point E.
Calcule le quotient $\frac{DE}{DA}$.

42 L'unité de longueur est le centimètre.
ABCD est un carré de côté 3. $AI = IJ = x$.

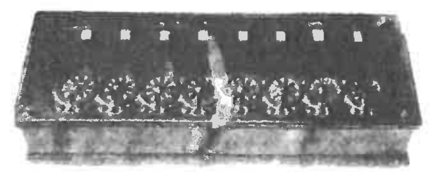


1) Quelle valeur dois-tu donner à x pour que l'aire du trapèze rectangle IJDC soit égale au quart de l'aire du carré ABCD ?
2) En utilisant uniquement le compas, marque le point J sur [AC].

43 a et b sont des nombres réels tels que $0 < a < b$.
Sur la droite (D) de repère (O,I) : les points A et B ont pour abscisses respectives a et b ; le point K est le milieu du segment [AB].
Trace le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de diamètre [AB] et le cercle $(\mathscr{C}_2)$ de diamètre [OK].
E est l'un des points communs aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
1) Exprime OE en fonction de a et b.
2) Calcule OE pour $a = 1$
3) On donne un segment de longueur ℓ ($\ell > 1$). Énonce un programme de construction d'un segment de longueur $\sqrt{\ell}$.

12 Calcul numérique

Blaise Pascal (1623 - 1663)
Mathématicien, physicien, philosophe et écrivain, il inventa sa machine à calculer pour aider son père chargé d'une mission difficile dans l'Administration



Photothèque Hachette

SOMMAIRE

1 Valeur absolue

1.1 NOUVELLES INÉGALITÉS

Écriture	Lecture	Signification		
$a \geq b$	a est supérieur ou égal à b	$a \geq b$	équivaut à	$a = b$ *ou* $a > b$
$a \leq b$	a est inférieur ou égal à b	$a \leq b$	équivaut à	$a = b$ *ou* $a < b$

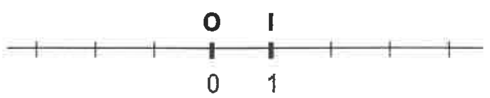
EXERCICE

1.a Pour chacune des inégalités suivantes, indique si elle est vraie ou fausse :

$0,1 \geq \frac{1}{10}$; $3,1 > 1,31$; $6,5 < -16,5$; $5 \leq 5$; $0,045 \geq 0,05$; $78 < 78$.

1.2 VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

Activité 1



La droite (D) est munie du repère (O, I)
- Place les points C, E, F et G d'abscisses respectives : -3 ; $-1,5$; -1 ; $2,5$.
- Calcule : OC ; OE ; OF ; OG.

- Quelle est la distance à zéro de chacun des nombres suivants: -3 ; $-1,5$; -1 ; $2,5$?
- Trouve la distance à zéro de chacun des nombres suivants : -4 ; $-\frac{5}{2}$; 0 ; $2,14$; 6.

DÉFINITION

On appelle valeur absolue d'un nombre la distance à zéro de ce nombre.

On note : $|a|$

On lit : valeur absolue de a.

$|a| = OA$

Exemples

$|-4,7| = 4,7$; $|0| = 0$; $|14| = 14$; $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$; $|-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$.

Remarque : La valeur absolue d'un nombre réel est un nombre positif.

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

La racine carrée du carré d'un nombre est égale à la valeur absolue de ce nombre.

a étant un nombre réel, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$

EXERCICES

1.b Donne la valeur absolue de chacun des nombres : $-3,04$; $-\frac{1}{3}$; 0 ; $5,2$; $\frac{8}{5}$.

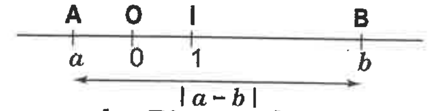
1.c La droite (D) est munie du repère (O, I). Place approximativement les nombres suivants puis donne leur valeur absolue :
$1-\sqrt{3}$; $\sqrt{5}-2$; $4+\sqrt{2}$

1.d Ecris plus simplement : $\sqrt{(-2,5)^2}$; $\sqrt{(7,1)^2}$.

1.3 DISTANCE DE DEUX NOMBRES

Présentation

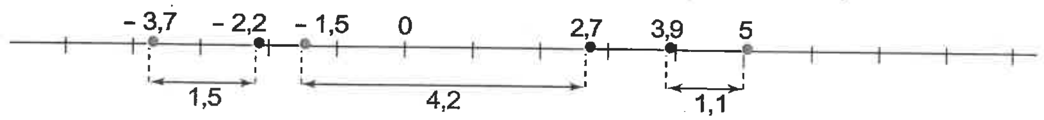
Sur une droite graduée, des points A et B ont respectivement pour abscisses a et b.
On appelle **distance des nombres réels a et b**, la distance des points A et B ; c'est la valeur absolue de leur différence.



Distance des nombres a et b = Distance des points A et B = $|a - b|$

Exemples

Distance de 2,7 et – 1,5 $= |2,7-(-1,5)|$ $= 4,1$
Distance de 3,9 et 5 $= |3,9 - 5|$ $= 1,1$
Distance de – 2,2 et – 3,7 $= |-2,2-(-3,7)|$ $= 1,5$



EXERCICES

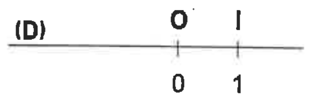
1.e Compare la distance des nombres x et y et celle des nombres $(x+5)$ et $(y+5)$.

1.f Dans chacun des cas suivants, calcule la distance des nombres a et b et trouve un nombre à égale distance de ces deux nombres. Fais un schéma.
$a = 2,79$ et $b = 3,04$; $a = -1,7$ et $b = 5,2$; $a = -0,25$ et $b = -1,75$; $a = 5,3$ et $b = -5,3$

2 Intervalles

2.1 VOCABULAIRE ET REPRÉSENTATION

Activité



(D) est une droite munie du repère (O, I).
- Trace en rouge l'ensemble des points dont l'abscisse est un nombre plus petit que – 3.
- Trace en bleu l'ensemble des points dont l'abscisse est un nombre plus grand que 1,5.
- Trace en vert l'ensemble des points non encore coloriés.

Donne l'abscisse de cinq points de l'ensemble tracé en vert.
Parmi les encadrements suivants trouve celui qui caractérise l'ensemble tracé en vert.
$-3 < x < 1,5$; $-3 \leq x \leq 1,5$; $-3 < x \leq 1,5$; $-3 \leq x < 1,5$.
Les trois ensembles tracés en rouge, en bleu et en vert représentent des **intervalles**.

Vocabulaire

a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.
– Les nombres a et b sont les **bornes** de chacun des intervalles suivants :
$[a ; b]$; $[a ; b[$; $]a ; b]$ et $]a ; b[$
– La distance $|a - b|$ de ces nombres a et b est appelée l'**amplitude de ces intervalles.**
– À un élément x de chacun de ces intervalles, on peut associer respectivement l'encadrement :
$a \leq x \leq b$; $a \leq x < b$; $a < x \leq b$; $a < x < b$;
$|a - b|$ est aussi l'**amplitude de ces encadrements.**

Ecriture	*Lecture*	*Ensemble des x tels que*	*Représentation*
$[a ; b]$	**intervalle** fermé a, b.	$a \leq x \leq b$	a b
$[a ; b[$	**intervalle** a, b fermé en a, ouvert en b.	$a \leq x < b$	a b
$]a ; b]$	**intervalle** a, b, ouvert en a, fermé en b.	$a < x \leq b$	a b
$]a ; b[$	**intervalle** ouvert a, b.	$a < x < b$	a b
$]\leftarrow ; b[$	**intervalle** des nombres plus petits que b.	$x < b$	b
$]\leftarrow ; b]$	**intervalle** des nombres inférieurs ou égaux à b.	$x \leq b$	b
$]a ; \rightarrow[$	**intervalle** des nombres plus grands que a.	$x > a$	a
$[a ; \rightarrow[$	**intervalle** des nombres supérieurs ou égaux à a.	$x \geq a$	a

EXERCICES

2.a Représente sur une droite graduée les intervalles suivants :
$]-3 ; 1[$; $[-2,5 ; 4]$; $]5 ; \rightarrow[$; $]\leftarrow ; -2]$; $[-4 ; -1[$.

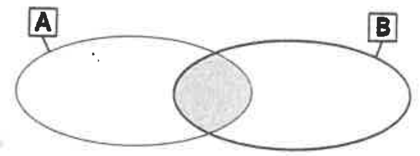
2.b Ecris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres définis ci-dessous :
$x \leq -2$; $x > 3,5$; $-4 < x < 6$; $-2 \leq x < 2$; $5,1 \leq x$.

2.c Traduis à l'aide d'inégalités:
$x \in]0 ; \rightarrow[$; $x \in]-4 ; 5[$; $x \in]-3,5 ; \rightarrow[$; $x \in [-10 ; 10]$.

2.d Donne six nombres de chacun des intervalles suivants et calcule l'amplitude de chacun de ces intervalles : $]-1 ; 2[$; $[4.28 ; 4,3]$; $]-5,1 ; -5[$; $]-0,5 ; 0,5[$

2.2 INTERSECTION, RÉUNION D'INTERVALLES

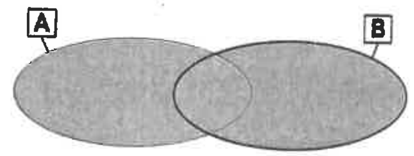
Intersection et réunion d'ensembles



A ∩ B

L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A *et* à B.
On note : A ∩ B
On lit : A inter B

$x \in A \cap B$ équivaut à $x \in A$ et $x \in B$



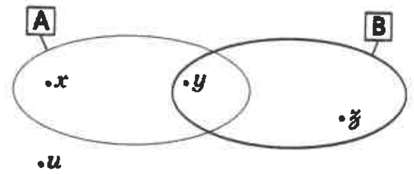
A ∪ B

La réunion des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A *ou* à B.
On note : A ∪ B
On lit : A union B

$x \in A \cup B$ équivaut à $x \in A$ ou $x \in B$

Activité

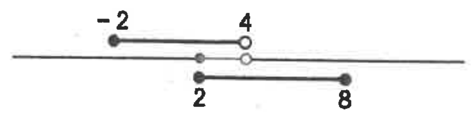
On donne le diagramme ci-contre.
Le tableau ci-dessous précise l'appartenance ou la non appartenance des éléments x, y, z, u aux ensembles A, B, A ∩ B, A∪B.



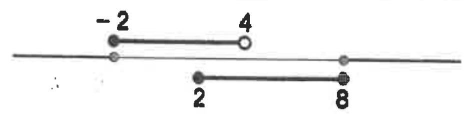
• Complète ce tableau.

	A	B	A∩B	A∪B
x	$x \in A$	$x \notin B$		
y			$y \in A \cap B$	
z		$z \in B$	$z \notin A \cap B$	
u				$u \notin A \cup B$

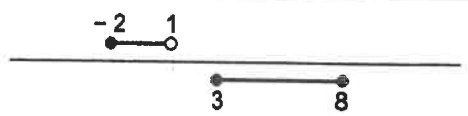
Intersection et réunion d'intervalles



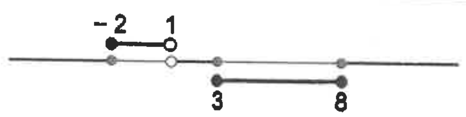
$[-2 ; 4[\cap [2 ; 8] = [2 ; 4[$



$[-2 ; 4[\cup [2 ; 8] = [-2 ; 8]$

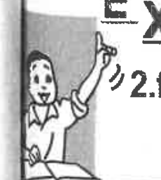


Les intervalles $[-2 ; 1[$ et $[3 ; 8]$ n'ont pas d'élément commun, on dit qu'ils sont **disjoints**



La réunion des intervalles $[-2 ; 1[$ et $[3 ; 8]$ n'est pas un intervalle.

EXERCICE



2.f Représente sur une droite graduée et écris plus simplement :
$]\leftarrow ; 11[\cup]-8 ; \rightarrow[$; $]-8 ; 1] \cup]1 ; 5[$; $[5 ; 12[\cup [8 ; 12]$
$[-3 ; \rightarrow[\cap]-5 ; 2]$; $[1 ; 2] \cap [1 ; 1,5[$; $]-1 ; 3] \cap [0 ; 7]$

3 Comparaison de nombres réels

3.1 INÉGALITÉS ET ADDITION

La propriété suivante introduite en classe de 4e permet de démontrer une autre propriété :

a, b et c étant des nombres réels,
si $a < b$ alors $a + c < b + c$
si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on ajoute membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

a, b, c et d étant des nombres réels,
Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$
Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

Démonstration

a, b, c et d sont des nombres réels tels que
$a < b$ et $c < d$
Donc : $a + c < b + c$ et $b + c < b + d$
Par conséquent : $a + c < b + d$

3.2 INÉGALITÉS ET MULTIPLICATION

Les propriétés suivantes introduites en classe de 4e permettent de démontrer une autre propriété :

a, b et c sont des nombres réels, $c > 0$
si $a < b$ alors $ac < bc$
si $a \leq b$ alors $ac \leq bc$

a, b et c sont des nombres réels, $c < 0$
si $a < b$ alors $ac > bc$
si $a \leq b$ alors $ac \geq bc$

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on multiplie membre à membre des inégalités de même sens entre nombres positifs, on obtient une nouvelle inégalité de même sens

a, b, c et d sont des nombres réels positifs.
Si $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$
Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$

Démonstration

a, b, c et d sont des nombres réels positifs tels que
$a < b$ et $c < d$
Or $c > 0$ et $b > 0$, puisque : $ac < bc$ et $bc < bd$
Par conséquent : $ac < bd$

3.3 COMPARER DES CARRÉS ET DES RACINES CARRÉES

Activité

• La première ligne du tableau ci-dessous comprend des nombres rangés dans l'ordre croissant. Complète ce tableau en inscrivant dans la deuxième ligne le carré des nombres de la première ligne.

a	− 82	− 80	− 11	− 5	− 3,3	− 2,5	0	1	3,5	12	25	100	167	178
a^2														

$-82 < -80 < -11 < -5$
• Les carrés de ces nombres sont-ils rangés ?
Si oui, dans quel ordre ?

$-3{,}3 < -2{,}5 < 0 < 1 < 3{,}5$
• Les carrés de ces nombres sont-ils rangés ?
Si oui, dans quel ordre ?

$12 < 25 < 100 < 167 < 178$
• Les carrés de ces nombres sont-ils rangés ?
Si oui, dans quel ordre ?

Démontrons dans le cas général les résultats obtenus.

Démonstration

a et b sont deux nombres négatifs.
On veut démontrer que :
$a < b$ *équivaut à* $a^2 > b^2$

• Justifie que les inégalités suivantes sont équivalentes :

$a^2 > b^2$
$a^2 - b^2 > 0$
$(a + b)(a - b) > 0$
$a - b < 0$
$a < b$

a et b sont deux nombres positifs.
On veut démontrer que :
$a < b$ *équivaut à* $a^2 < b^2$

• Justifie que les inégalités suivantes sont équivalentes :

$a^2 < b^2$
$a^2 - b^2 < 0$
$(a + b)(a - b) < 0$
$a - b < 0$
$a < b$

En utilisant les résultats précédents, justifie que, a et b étant des nombres positifs :
$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ *équivaut à* $a < b$

PROPRIÉTÉS

Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.

a et b sont des nombres négatifs
$a < b$ *équivaut à* $a^2 > b^2$
$a \leq b$ *équivaut à* $a^2 \geq b^2$

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

a et b sont des nombres positifs
$a < b$ *équivaut à* $a^2 < b^2$
$a \leq b$ *équivaut à* $a^2 \leq b^2$

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

a et b étant deux nombres positifs
$a < b$ *équivaut à* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
$a \leq b$ *équivaut à* $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Remarque : Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Exemples

Comparons $4\sqrt{3}$ et 7

On a $(4\sqrt{3})^2 = 48$; $7^2 = 49$
Or $48 < 49$
Donc $4\sqrt{3} < 7$

Comparons $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$

On a $(2\sqrt{3})^2 = 12$; $(3\sqrt{2})^2 = 18$
Or $12 < 18$
Donc $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

EXERCICES

3.a Compare les nombres : $3\sqrt{2}$ et 4 ; $4\sqrt{3}$ et $5\sqrt{2}$.

3.b Trouve le signe de $(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})$; de $(4\sqrt{5} - 9)$.

3.4 COMPARER DES INVERSES

Activité

• La première ligne du tableau ci-dessous comprend des nombres rangés dans l'ordre croissant. Complète ce tableau en inscrivant dans la deuxième ligne l'inverse des nombres de la première ligne.

a	$-1\,000$	-100	-10	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}01$	$0{,}1$	10	100	$1\,000$	$10\,000$
$\frac{1}{a}$												

$-1000 < -100 < -10 < -1$
• Les inverses de ces nombres sont-ils rangés ?
Si oui, dans quel ordre ?

$-0{,}1 < -0{,}01 < 0{,}01 < 0{,}1$
• Les inverses de ces nombres sont-ils rangés ?
Si oui, dans quel ordre ?

$10 < 100 < 1\,000 < 10\,000$
• Les inverses de ces nombres sont-ils rangés ?
Si oui, dans quel ordre ?

Démontrons dans le cas général les résultats obtenus.

Démonstration

a et b sont deux nombres de même signe et différents de 0.
• Justifie que les inégalités suivantes sont alors équivalentes.

$$a < b \quad ; \quad \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} \quad ; \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

PROPRIÉTÉ

Deux nombres de même signe et différents de 0 sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

a et b sont deux nombres de même signe et différents de 0

$a < b$ *équivaut à* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a \leq b$ *équivaut à* $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Remarque : Pour comparer deux nombres différents de 0, on peut comparer leurs inverses

Exemple

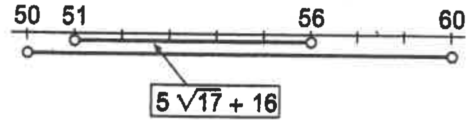
Comparons $\frac{1}{453{,}59}$ et $\frac{2}{907{,}2}$.
Ces nombres sont de même signe.
Leurs inverses sont respectivement $453{,}59$ et $\frac{907{,}2}{2}$ c'est-à-dire $453{,}59$ et $453{,}6$
Or $453{,}59 < 453{,}6$. Donc $\frac{1}{453{,}59} > \frac{2}{907{,}2}$

3.5 UTILISER DES ENCADREMENTS POUR COMPARER

Exemple 1

Rangeons dans l'ordre croissant les nombres $5\sqrt{57} + 16$; 50 *et* 60.

On sait que : $7^2 < 57 < 8^2$
Donc : $7 < \sqrt{57} < 8$
$5 \times 7 < 5\sqrt{57} < 5 \times 8$
$35 + 16 < 5\sqrt{57} + 16 < 40 + 16$
$51 < 5\sqrt{57} + 16 < 56$
$50 < 51 < 5\sqrt{57} + 16 < 56 < 60$
Par conséquent : $50 < 5\sqrt{57} + 16 < 60$

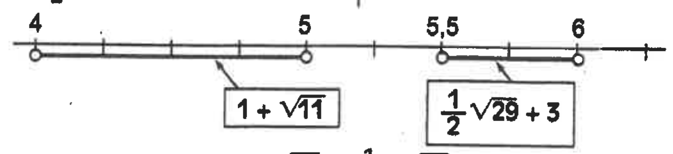


Exemple 2

Comparons les nombres $\frac{1}{2}\sqrt{29} + 3$ *et* $1 + \sqrt{11}$

On sait que : $5^2 < 29 < 6^2$.
Donc : $5 < \sqrt{29} < 6$
$\frac{1}{2} \times 5 < \frac{1}{2}\sqrt{29} < \frac{1}{2} \times 6$
$2{,}5 + 3 < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3 < 3 + 3$
$5{,}5 < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3 < 6$

On sait que $3^2 < 11 < 4^2$
Donc $3 < \sqrt{11} < 4$
$1 + 3 < 1 + \sqrt{11} < 1 + 4$
$4 < 1 + \sqrt{11} < 5$



Par conséquent : $1 + \sqrt{11} < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3$

MÉTHODE

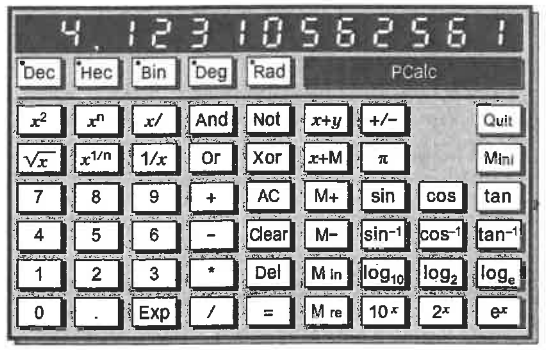
Pour comparer des nombres réels, on peut :
• comparer leurs carrés ou leurs racines carrées ;
• comparer leurs inverses ;
• étudier le signe de leur différence ;
• les placer dans des intervalles disjoints.

EXERCICE

3.c Compare les nombres : $\sqrt{5} - 1$ et 2 ; $\frac{1}{\sqrt{69\,000}} - 198$ et 164.

4 Calcul approché

4.1 CALCUL DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE À L'AIDE D'UNE CALCULATRICE



Pour $\sqrt{17}$ la calculatrice affiche :

4.1231056

On peut en déduire que l'arrondi d'ordre 5 de $\sqrt{17}$ est 4,123 11.

• Donne un encadrement de $\sqrt{17}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

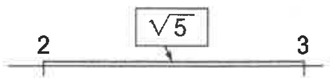
4.2 CALCUL DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Recherchons un encadrement de $\sqrt{5}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

• Considérons la liste des carrés parfaits :
1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; ....

On a $2^2 < 5 < 3^2$

Donc $2 < \sqrt{5} < 3$

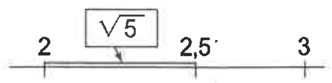


2 est l'approximation décimale d'ordre 0 par défaut de $\sqrt{5}$. | 3 est l'approximation décimale d'ordre 0 par excès de $\sqrt{5}$.

Quelle est la meilleure de ces deux approximations décimales d'ordre 0 ?
Le nombre équidistant de 2 et 3 est 2,5
$(2,5)^2 = 6,25$

On a $2^2 < 5 < (2,5)^2$

Donc $2 < \sqrt{5} < 2,5$

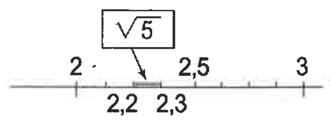


2 est la meilleure approximation décimale d'ordre 0 de $\sqrt{5}$. C'est l'arrondi d'ordre de 0 de $\sqrt{5}$.

• Calculons les carrés des nombres décimaux d'ordre 1 compris entre 2 et 2,5
$(2,1)^2 = 4,41$; $(2,2)^2 = 4,84$; $(2,3)^2 = 5,29$.

On a $(2,2)^2 < 5 < (2,3)^2$

Donc $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

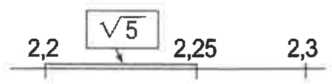


2,2 est l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de $\sqrt{5}$. | 2,3 est l'approximation décimale d'ordre 1 par excès de $\sqrt{5}$.

Quelle est la meilleure de ces deux approximations décimales d'ordre 1 ?
Le nombre équidistant de 2,2 et 2,3 est 2,25
$(2,25)^2 = 5,062\,5$

On a $(2,2)^2 < 5 < (2,25)^2$

Donc $2,2 < \sqrt{5} < 2,25$



2,2 est la meilleure approximation décimale d'ordre 1 de $\sqrt{5}$. C'est l'arrondi d'ordre de 1 de $\sqrt{5}$.

• Continuer de même pour déterminer les approximations décimales et l'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{5}$.

4.3 CALCUL DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE À L'AIDE D'UNE TABLE DES CARRÉS

Table des carrés des nombres entiers de 1 à 99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1 024	1 089	1 156	1 225	1 296	1 369	1 444	1 521
4	1 600	1 681	1 764	1 849	1 936	2 025	2 116	2 209	2 304	2 401
5	2 500	2 601	2 704	2 809	2 916	3 025	3 136	3 249	3 364	3 481
6	3 600	3 721	3 844	3 969	4 096	4 225	4 356	4 489	4 624	4 761
7	4 900	5 041	5 184	5 329	5 476	5 625	5 776	5 929	6 084	6 241
8	6 400	6 561	6 724	6 889	7 056	7 225	7 396	7 569	7 744	7 921
9	8 100	8 281	8 464	8 649	8 836	9 025	9 216	9 409	9 604	9 801

Exemples

Le nombre est dans la table des carrés.
$\sqrt{3\,969} = 63$; $\sqrt{7\,056} = 84$; $\sqrt{2\,401} = 49$; $\sqrt{529} = 23$; $\sqrt{961} = 31$

Le nombre est entier positif, plus petit que 10^4.
Recherchons un encadrement de $\sqrt{3\,100}$.

On a $3\,025 < 3\,100 < 3\,136$

$55^2 < 3\,100 < 56^2$.

Donc $55 < \sqrt{3\,100} < 56$

Le nombre peut s'écrire comme produit d'un nombre positif plus petit que 10^4 par 10^{2n}, n étant un nombre entier relatif.
Recherchons un encadrement de $\sqrt{538\,241}$

On a $538\,241 = 5\,382,41 \times 10^2$; $5\,382,41 < 10^4$.

Donc $\sqrt{538\,241} = 10\sqrt{5\,382,41}$

Or $5\,329 < 5\,382,41 < 5\,476$

$73^2 < 5\,382,41 < 74^2$

Donc $73 < \sqrt{5\,382,41} < 74$

$10 \times 73 < 10\sqrt{5\,382,41} < 10 \times 74$

et $730 < \sqrt{538\,241} < 740$

EXERCICES

4.a En utilisant la table des carrés, donne la racine carrée de chacun des nombres suivants :
$\sqrt{8\,464}$, $\sqrt{4\,356}$, $\sqrt{396\,900}$, $\sqrt{7\,7440\,000}$, $\sqrt{0,1296}$, $\sqrt{26,01}$.

4.b En utilisant la table des carrés, donne un encadrement de la racine carrée de chacun des nombres suivants : $\sqrt{4156}$, $\sqrt{1\,320}$, $\sqrt{527\,300}$, $\sqrt{7\,650\,000}$, $\sqrt{0,9124}$, $\sqrt{3,7}$.

4.4 ENCADREMENTS

Encadrer une somme, un produit

Sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ et $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, recherchons un encadrement de la somme ($\sqrt{2} + \sqrt{3}$) et du produit ($\pi\sqrt{2}$) par des nombres décimaux d'ordre 2.

On a :
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$
Donc : $1{,}41 + 1{,}73 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}42 + 1{,}74$
$$3{,}14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}16$$

On a :
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$
Donc : $1{,}41 \times 3{,}14 < \pi \times \sqrt{2} < 1{,}42 \times 3{,}15$
$$4{,}42 < 4{,}4274 < \pi \times \sqrt{2} < 4{,}473 < 4{,}48$$
$$4{,}42 < \pi \times \sqrt{2} < 4{,}48$$

Encadrer une différence

Sachant que : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, recherchons un encadrement de la différence ($\sqrt{3} - \sqrt{2}$) par des nombres décimaux d'ordre 2.

On a : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$

Donc : $-1{,}41 > -\sqrt{2} > -1{,}42$ et $-1{,}42 < -\sqrt{2} < -1{,}41$

Par conséquent : $1{,}73 + (-1{,}42) < \sqrt{3} + (-\sqrt{2}) < 1{,}74 + (-1{,}41)$
$$0{,}31 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0{,}33$$

> Il n'existe pas de règle permettant de soustraire membre à membre des inégalités de même sens.
> Trouve un exemple pour justifier cette remarque.

MÉTHODE

Pour encadrer la différence ($a - b$), connaissant un encadrement a et de b, on peut procéder comme suit :
- on détermine un encadrement de ($-b$) de même sens que celui de a.
- on détermine un encadrement de la somme $a + (-b)$.

Encadrer un quotient

Sachant que a et b sont deux nombres réels tels que $4{,}71 < a < 4{,}72$ et $0{,}36 < b < 0{,}37$, recherchons un encadrement du quotient $\frac{a}{b}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

On a : $0{,}36 < b < 0{,}37$ et $4{,}71 < a < 4{,}72$

Donc : $\frac{1}{0{,}36} > \frac{1}{b} > \frac{1}{0{,}37}$ et $\frac{1}{0{,}37} < \frac{1}{b} < \frac{1}{0{,}36}$

Par conséquent :
$$4{,}71 \times \frac{1}{0{,}37} < a \times \frac{1}{b} < 4{,}72 \times \frac{1}{0{,}36}$$
$$\frac{4{,}71}{0{,}37} < \frac{a}{b} < \frac{4{,}72}{0{,}36}$$

On obtient : $12{,}72 < \frac{4{,}71}{0{,}37} < 12{,}73$ et $13{,}11 < \frac{4{,}72}{0{,}36} < 13{,}12$

Donc : $12{,}72 < \frac{4{,}71}{0{,}37} < \frac{a}{b} < \frac{4{,}72}{0{,}36} < 13{,}12$

Par conséquent $12{,}72 < \frac{a}{b} < 13{,}12$

> Il n'existe pas de règle permettant de diviser membre à membre des inégalités de même sens.
> Trouve un exemple pour justifier cette remarque.

MÉTHODE

Pour encadrer le quotient $\frac{a}{b}$, connaissant un encadrement de chacun des nombres positifs a et b, on peut procéder comme suit :
- on détermine un encadrement de $\frac{1}{b}$ de même sens que celui de a.
- on détermine un encadrement du produit $a \times \frac{1}{b}$.

Exemples : encadrement de nombres réels

En n'utilisant ni table ni calculatrice, et sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, recherchons un encadrement par deux décimaux d'ordre 2 de $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ et de $\sqrt{216}$.

Encadrement de $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Pour éviter les calculs fastidieux en l'absence de calculatrice, on peut trouver une écriture de ce nombre sans radical au dénominateur. On obtient :
$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Par conséquent :
$$-1{,}42 < -\sqrt{2} < -1{,}41$$
$$1{,}73 - 1{,}42 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}74 - 1{,}41$$
Donc : $0{,}31 < \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} < 0{,}33$

L'amplitude de cet encadrement est 0,02 (0,33 – 0,31).

Encadrement de $\sqrt{216}$

On peut décomposer 216 en un produit de facteurs premiers. On obtient :
$$216 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 3$$
$$\sqrt{216} = 6 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

Par conséquent :
$$1{,}41 \times 1{,}73 < \sqrt{3} \times \sqrt{2} < 1{,}42 \times 1{,}74$$
$$14{,}63 < 14{,}6358 < \sqrt{216} < 14{,}8248 < 14{,}83$$
Donc : $14{,}63 < \sqrt{216} < 14{,}83$

L'amplitude de cet encadrement est 0,2 (14,83 – 14,63).

EXERCICES

4.c La longueur d'un champ est comprise entre 55 m et 56 m, sa largeur est comprise entre 27 m et 28 m. Trouve un encadrement du périmètre et de l'aire de ce champ.

4.d Une citerne contient entre 200 l et 240 l d'eau potable. La consommation d'une personne est comprise entre 4 l et 5 l d'eau par jour.
Donne un encadrement du nombre de jours pendant lesquels l'approvisionnement en eau sera assurée par cette citerne pour une famille de 5 personnes.

4.e Encadre $\sqrt{143}$ par deux nombres entiers consécutifs.

4.f Sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, encadre $\sqrt{450}$ par deux nombres décimaux d'ordre 1, cet encadrement ayant une amplitude de 0,2.

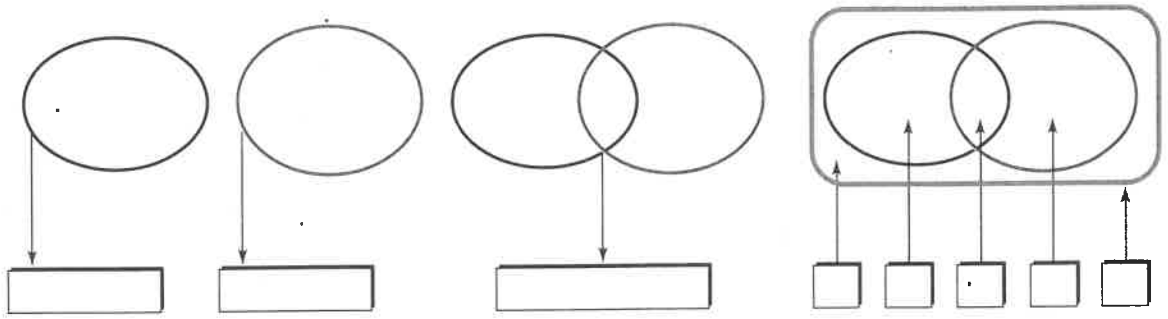
5 Problèmes de dénombrement

Activité : utilisation de diagrammes

Cent personnes ont répondu à un questionnaire concernant leur alimentation du Dimanche 12 Mai 1996.
Il apparaît que :
42 d'entre elles ont mangé de la viande,
51 ont mangé du poisson,
25 ont mangé de la viande et du poisson.

Combien de personnes n'ont-elles mangé que du poisson ?
Combien de personnes ont-elles mangé ni viande ni poisson ?

Tu pourras t'aider des diagrammes suivants pour traduire la situation décrite dans l'énoncé et servir de support visuel à ton raisonnement.



Exemple 1 : utilisation de tableaux

Trouve le nombre d'intervalles fermés [a;b] où a et b sont des nombres entiers naturels distincts appartenant à l'intervalle [2;7];

Une démarche consiste à écrire tous les intervalles qui satisfont les conditions.
Pour faciliter ce travail, on peut utiliser un tableau à double entrée après avoir trouvé les valeurs de a et b qui conviennent :

a et b sont des nombres entiers naturels ;
$a < b$;
a et b appartiennent à l'intervalle [2;7].

Par conséquent :
a peut prendre les valeurs 2, 3, 4, 5 et 6;
b peut prendre les valeurs 3, 4, 5, 6 et 7.

a \ b	3	4	5	6	7
2	[2;3]	[2;4]	[2;5]	[2;6]	[2;7]
3		[3;4]	[3;5]	[3;6]	[3;7]
4			[4;5]	[4;6]	[4;7]
5				[5;6]	[5;7]
6					[6;7]

En comptant dans le tableau, on trouve 15 intervalles.

Ce tableau comporte autant de lignes que de colonnes. Les cases grisées forment **la diagonale du tableau.** Vérifie qu'il y a autant de cases hachurées que de cases non grisées contenant un intervalle.

Exemple 2 : utilisation d'arbres de choix

Trouve le nombre de diviseurs de 75 625.

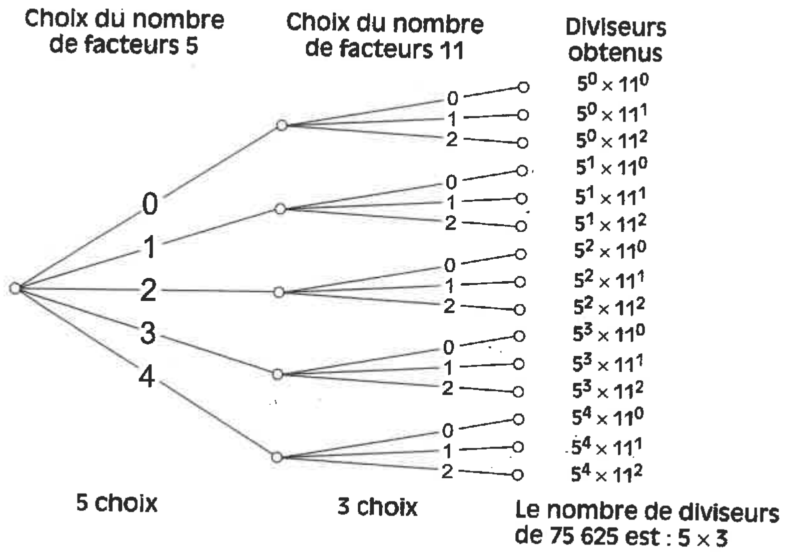
• Une démarche consiste à écrire tous les diviseurs de 75 625. Cette démarche ne sera performante que si l'on dispose d'un procédé permettant d'obtenir tous ces diviseurs.

• Un de ces procédés consiste à décomposer 75 625 en produit de facteurs premiers, puis de caractériser les diviseurs de 75 625 à l'aide de ces facteurs premiers.

Après décomposition, on a : $75\,625 = 5^4 \times 11^2$.
Par conséquent, la décomposition en produit de facteurs premiers d'un diviseur de 75 625 ne peut comporter que les facteurs 5 et 11.
Il suffit de savoir combien cette décomposition peut contenir de facteurs 5 et de facteurs 11.

Par exemple :
1) $5^2 \times 11$ est un diviseur de 75 625, il contient deux facteurs 5 et un facteur 11.
2) 11^2 est un diviseur de 75 625, il contient zéro facteur 5 et deux facteurs 11.
Un diviseur de 75 625 peut avoir : 0, 1, 2, 3, 4 facteurs **5** et 0, 1, 2 facteurs **11**.

L'arbre de choix permet d'écrire de manière exhaustive les diviseurs du nombre 75 625.



EXERCICES

5.a Pour débuter une partie de LUDO, tu lances deux fois de suite le dé.
Après chacun des deux lancers, tu notes le numéro de la face supérieure du dé, obtenant ainsi un couple de nombres entiers. Combien de couples différents est-il possible d'obtenir par ce procédé ?

5.b ***1)*** Trouve le nombre d'entiers naturels appartenant à chacun des intervalles suivants :
[3 ; 15],]5 ; 23[, [7 ; 25[,]0 ; 12].
2) a et b sont des nombres entiers naturels tels que $a < b$.
Exprime, en fonction de a et b, le nombre d'entiers naturels appartenant à chacun des intervalles suivants : [a ; b],]a ; b[, [a ; b[,]a ; b].

5.c Aprés avoir quitté un parking du centre-ville, un représentant rencontre successivement plusieurs carrefours où trois possibilités s'offrent chaque fois à lui : aller tout droit, tourner à droite, tourner à gauche. Après avoir dépassé le 3e carrefour, il s'arrête. Combien aurait-il pu suivre de trajets différents ?

ENTRAÎNEMENT

1 VALEUR ABSOLUE

1 Calcule la valeur absolue de chacun des nombres : $-2{,}03$; $-\frac{4}{3}$; 0 ; $1{,}07$; $4{,}96$; $\frac{7}{11}$

2 L'unité de longueur est le centimètre.
Une droite (D) est munie du repère (O,I).
Place approximativement les nombres suivants, puis calcule leurs valeurs absolues :
$2-\sqrt{7}$; $\sqrt{11}-3$; $1+\sqrt{3}$.

3 x, y et z sont des nombres réels.
Compare la distance des nombres x et y et celle des nombres $(x-z)$ et $(y-z)$.

4 Dans chacun des cas suivants, calcule la distance des nombres m et p et trouve un nombre à égale distance de ceux-ci :
$m=-3{,}25$ et $p=-2{,}75$; $m=-2{,}3$ et $p=1{,}7$; $m=1{,}09$ et $p=3{,}61$.

2 INTERVALLES

5 Donne cinq nombres réels de chacun des intervalles : $[-2\,;2]$; $[-1{,}7\,;-1{,}2[$; $]3{,}12\,;3{,}17]$; $]-2{,}134\,;-2{,}128[$.

6 Écris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres définis ci-dessous :

- $x > 1$
- $x < \frac{1}{2}$ et $x \geq -2$
- $x < -1$
- $-7 < x \leq 5$

7 Traduis à l'aide d'inégalités l'appartenance de x à chacun des intervalles ci-dessous :
$[-2\,;4[$; $]3{,}4\,;7]$; $]\leftarrow;-9]$; $]\leftarrow;4{,}1[$; $]80\,;\rightarrow[$.

8 *1)* Représente sur une droite graduée et écris plus simplement :
$[-2\,;\rightarrow[\ \cap\ [-1\,;\rightarrow[$ $]-2\,;-1[\ \cap\ [-1\,;\rightarrow[$
$]\leftarrow;3]\ \cap\ [-2{,}5\,;\rightarrow[$ $]-2\,;2]\ \cap\ [-1\,;1]$
$]\leftarrow;-3]\ \cap\ [-3\,;2]$

2) Refais les mêmes exercices en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

3 COMPARAISON DES NOMBRES RÉELS

9 Compare les nombres réels suivants :

1) $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{41}$; $-\frac{1}{51}$ et $-\frac{1}{60}$; $-\frac{6{,}31}{22}$ et $\frac{47}{13}$.

2) $\frac{18}{21}$ et $\frac{21}{20}$; $\frac{1993}{1994}$ et $\frac{2001}{2000}$; $-\frac{19}{20}$ et $-\frac{31}{30}$; $-\frac{205}{206}$ et $-\frac{1307}{1306}$.

10 Compare les nombres réels ci-dessous :
$1{,}1\sqrt{5}$ et $1{,}01\sqrt{5}$; $-2\sqrt{7}$ et $4\sqrt{7}$; $5-\sqrt{2}$ et $3-\sqrt{2}$; $2+\sqrt{3}$ et $7+\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}-1$ et $3-\sqrt{2}$.

11 $a=\sqrt{2}-1$ et $b=2-\sqrt{3}$.
Démontre que les nombres réels a et b sont positifs.
Compare a et b.

12 Compare les nombres réels suivants :
9 et $4\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$; $-2\sqrt{7}$ et $-7\sqrt{2}$.

13 Sans utiliser la calculatrice, range dans l'ordre croissant les nombres réels suivants :
1) $\sqrt{17}$; $\sqrt{19}$; $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{2}$.
2) $-3\sqrt{5}$; $5\sqrt{3}$; $-5\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$.

14 Compare les nombres réels ci-dessous :
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\sqrt{7}}$; $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{8}}$.

4 CALCUL APPROCHÉ

15 En utilisant ta calculatrice, trouve l'encadrement des nombres réels ci-dessous par deux nombres décimaux d'ordre 2 consécutifs :
$\sqrt{14}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{21}$; $\sqrt{24}$.

16 Sachant que $185^2 < 34\,397 < 186^2$:
1) donne l'encadrement de $\sqrt{34\,397}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs;
2) donne l'encadrement de $\sqrt{3{,}439\,7}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2 consécutifs.

17 En utilisant la table des carrés à ta disposition, trouve un encadrement par deux nombres décimaux d'ordre 1 consécutifs de chacun des nombres réels ci-dessous :
$\sqrt{18}$; $\sqrt{39}$; $\sqrt{42}$; $\sqrt{58}$; $\sqrt{87}$.

18 En utilisant la table des carrés à ta disposition, trouve :
$\sqrt{9{,}61}$; $\sqrt{79{,}21}$; $\sqrt{0{,}1024}$; $\sqrt{59{,}29}$.

19 Trouve l'encadrement des nombres réels ci-dessous par deux nombres entiers naturels consécutifs :
$\sqrt{688}$; $\sqrt{927}$; $\sqrt{6\,923}$; $\sqrt{22\,999}$; $\sqrt{50\,400}$; $\sqrt{72\,012}$

20 Trouve l'encadrement des nombres réels ci-dessous par deux nombres décimaux d'ordre 1 consécutifs :
$\sqrt{1{,}23}$; $\sqrt{3{,}25}$; $\sqrt{9{,}57}$; $\sqrt{17{,}59}$.

21 Sans utiliser de calculatrice et par approximations successives, cherche un encadrement de $\sqrt{7}$, puis de $\sqrt{11}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

22 a et b sont deux nombres réels tels que :
$1{,}7 < a < 1{,}8$ et $2{,}3 < b < 2{,}4$.
Pour le nombre $a+b$, trouve le meilleur encadrement que tu peux déduire des données.

23 On te donne l'encadrement suivant du nombre π : $3{,}141\,5 < \pi < 3{,}141\,6$.
Pour chacun des nombres suivants : $\pi+4$; $\pi-5$; $-\pi$; 2π ; $2\pi-3$ et $-\pi-4$, trouve le meilleur encadrement que tu peux déduire des données.

24 a et b sont deux nombres réels tels que :
$1{,}35 < a < 1{,}47$ et $0{,}07 < b < 0{,}1$.
Pour chacun des nombres suivants : $a+b$; $a-b$; ab ; $2a+b$ et $4a-5b$, trouve le meilleur encadrement que tu peux déduire des données.

25 Sachant que :
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, donne l'encadrement par deux nombres décimaux d'ordre 2 de chacun des nombres suivants :
$3\sqrt{2}$; $-4\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$.

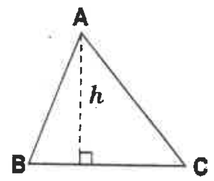
26 a, b, c, d, x et y désignent des nombres strictement négatifs tels que : $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.
Donne un encadrement de :
1) $\frac{x}{4}$; $-\frac{y}{3}$; $-\frac{2}{5}x$; $\frac{3}{2}y$.
2) $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $-\frac{1}{x}$; $-\frac{1}{y}$.

27 Sachant que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$, donne un encadrement de $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2 consécutifs.

28 Sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, donne un encadrement de $2-\sqrt{3}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2 consécutifs.

29 L et l désignent respectivement les dimensions (en m) d'un terrain rectangulaire.
Sachant que :
$20{,}6 < L < 21{,}1$ et $12{,}8 < l < 13{,}2$, trouve le meilleur encadrement du périmètre, puis de l'aire de ce terrain que tu peux déduire des données.

30 L'unité de longueur est le mètre.



Un triangle ABC a une aire comprise entre 16 et 19. Sachant que BC = 6, donne l'encadrement de la hauteur h de ce triangle par deux nombres entiers.

31 Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, donne un encadrement de l'aire d'un disque de rayon 5 cm.

32 *1)* Sachant que : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$; $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$, trouve l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de chacun des nombres réels a, b, c, d :
$a=3-\sqrt{2}$; $b=\sqrt{3}-2$; $c=\sqrt{5}+1$ et $d=3-\sqrt{15}$.
2) Place le mieux possible a, b, c et d sur une droite graduée de repère (O,I).
3) Détermine la valeur absolue de chacun des nombres a, b, c et d.

33 Sans utiliser de table et sachant que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ et $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, cherche un encadrement de $\sqrt{140}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

5 PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

34 Combien de nombres de trois chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1,2 et 3 ?

35 Une société de torréfaction de café propose deux variétés de café : le Robusta (r) et l'Arabica (a). Elle vend chacune des variétés de café sous trois conditionnements : soit en grains (g), soit moulu (m), soit lyophilisé (l).
Pour les acheteurs, le choix de la variété est prioritaire sur le mode de conditionnement.
Pour traduire q'un acheteur désire du Robusta lyophilisé, on écrira le couple (r ; l).

EXERCICES

Trouve tous les couples de choix possibles pour un acheteur.
Tu pourras t'aider d'un arbre de choix.

36 ABCDEFGH est un cube.
Tu vas découper ce cube en petits cubes de même volume.
1) Combien de petits cubes dont l'arête est la moitié de l'arête du cube ABCDEFGH pourrais-tu obtenir ?
2) Combien de petits cubes dont l'arête est le tiers de l'arête du cube ABCDEFGH pourrais-tu obtenir ?
3) Combien de petits cubes dont l'arête est le quart de l'arête du cube ABCDEFGH pourrais-tu obtenir ?

APPROFONDISSEMENT

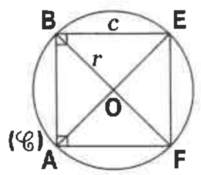
37 Sans utiliser de calculatrice, trouve le signe de chacun des nombres réels suivants : $2\sqrt{2} - 9$; $2\sqrt{11} - 3\sqrt{7}$; $8 - 5\sqrt{3}$.

38 Range dans l'ordre croissant les nombres suivants :
$2\sqrt{11} + 5$; 13 et 11. 19 ; 13 et $4\sqrt{17} - 2$.
Utilise une droite graduée pour illustrer chacun des rangements obtenus.

39 Posons $x = 9\sqrt{2}$ et $y = 6\sqrt{2}$.
Calcule les nombres m, g et h tels que :
$$m = \frac{x+y}{2} \quad ; \quad g = \sqrt{xy} \quad \text{et} \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$
puis range ces nombres dans l'ordre croissant.

40 La somme de trois nombres entiers naturels consécutifs a, b et c est comprise entre 259 et 266. Quels sont ces nombres ? (2 solutions).

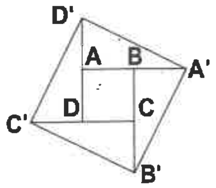
41 ABEF est un carré inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
L'unité de longueur est le centimètre.
Désignons par c la mesure du côté de ce carré.
On donne :
$3{,}14 < \pi < 3{,}15$
$5{,}2 < c < 5{,}3$
et $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$



Donne l'encadrement de l'aire du disque correspondant que tu peux déduire des données.

42 a et b sont des nombres réels tels que $a^2 \geq b^2$. Compare a et b.

43 L'unité de longueur est le centimètre.



Le quadrilatère ABCD est un carré tel que AB = 1.
AA' = 2 AB
BB' = 2 BC
CC' = 2 CD
DD' = 2 DA
Trouve l'encadrement par deux nombres décimaux d'ordre 2 consécutifs de A'D'.
Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ?

44 La mesure du côté de chacun des carrés ci-dessous est 1.
Désignons respectivement par $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_4$ et $\mathscr{A}_5$, les aires coloriées des figures 1, 2, 3, 4 et 5.
Ranges ces aires dans l'ordre croissant.

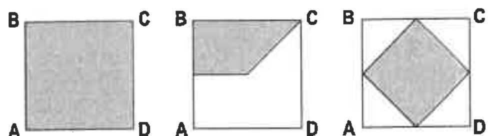


fig. 1 fig. 2 fig. 3

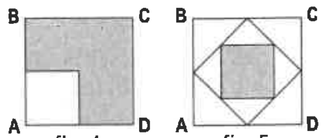
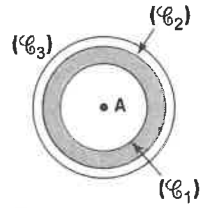


fig. 4 fig. 5

On pourra exprimer chacune des aires des figures 1 à 5 en fonction de $\mathscr{A}_1$.

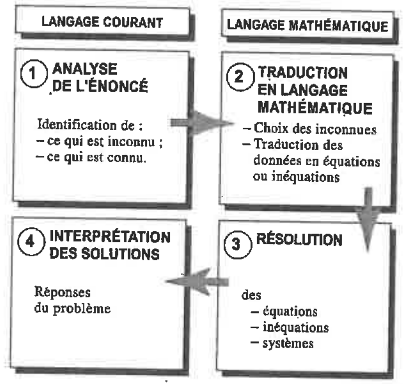
45 ($\mathscr{C}_1$), ($\mathscr{C}_2$) et ($\mathscr{C}_3$) sont trois cercles concentriques de centre O.



Le rayon de ($\mathscr{C}_3$) est le double du rayon de ($\mathscr{C}_1$) et le rayon de ($\mathscr{C}_2$) est la demi-somme des rayons de ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_3$).
1) Exprime les périmètres des cercles ($\mathscr{C}_1$), ($\mathscr{C}_2$) et ($\mathscr{C}_3$) en fonction du rayon r du cercle ($\mathscr{C}_1$).
Compare ensuite ces périmètres.
2) Compare les aires des disques ($\mathscr{D}_1$), ($\mathscr{D}_2$) et ($\mathscr{D}_3$) correspondants aux cercles ($\mathscr{C}_1$), ($\mathscr{C}_2$) et ($\mathscr{C}_3$) et l'aire de la couronne circulaire coloriée sur la figure.

13 Équations, inéquations dans ℝ

Photothèque Hachette



Isaac Newton (1642 - 1727)
Dans son ***Arithmétique Universelle****, Newton écrivait :*
« Vous voyez que dans les problèmes qui ne renferment que des nombres ou des quantités abstraites, il n'y a pour ainsi dire pas autre chose à faire qu'à traduire la question du langage ordinaire en langage algébrique ».

SOMMAIRE

1 Équations du 1er degré dans ℝ

1.1 ÉQUATIONS DU TYPE $ax + b = cx + d$

Exemple

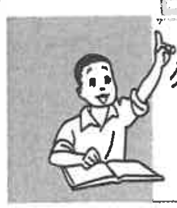
Résolvons l'équation (E) : $6x - 3 = 2x - 2$

En utilisant les propriétés vues en classe de 4e, on transforme l'équation (E) pour la ramener à une équation du type $x = u$.

$$6x - 2x = -2 + 3$$
$$4x = 1$$
$$x = 0{,}25$$

0,25 est la solution de (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\{0{,}25\}$.
L'ensemble $\{0{,}25\}$ se lit : **le singleton** 0,25.

Un singleton est un ensemble qui contient un seul élément.



EXERCICE

1.a Résous chacune des équations ci-dessous.
$(E_1)\ -3x - 2 = -5x + 6$; $(E_2)\ 2 - 7x + 3(x - 1) = 2x + 1$; $(E_3)\ 3x + 24 = x - 13$;
$(E_4)\ x\sqrt{3} + 1 = x + 5$; $(E_5)\ \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x+7}{6} = \dfrac{x}{3} - \dfrac{14}{7}$; $(E_6)\ x\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} + x$.

1.2 ÉQUATIONS DU TYPE $(ax + b)(cx + d) = 0$

Exemple 1

Résolvons l'équation (E) : $(2x - 3)(5x + 4) = 0$

Le premier membre de cette équation est un produit de deux facteurs, le second membre étant 0. On sait que :

> a et b étant des nombres réels,
> $ab = 0$ *équivaut à* $a = 0$ *ou* $b = 0$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est constitué des solutions de chacune des équations suivantes (E_1) et (E_2). Résolvons ces équations.

(E_1)
$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = 1{,}5$$

(E_2)
$$5x + 4 = 0$$
$$5x = -4$$
$$x = -0{,}8$$

1,5 et − 0,8 sont les seules solutions de (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\{1{,}5 ; -0{,}8\}$.
L'ensemble $\{1{,}5 ; -0{,}8\}$ se lit : **la paire** 1,5 ; − 0,8.

Une paire est un ensemble qui contient exactement deux éléments.

MÉTHODE

Pour résoudre une équation d'inconnue x du type $(ax + b)(cx + d) = 0$,
on résout séparément les équations (E_1) $ax + b = 0$ et (E_2) $cx + d = 0$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est constitué des solutions de chacune des équations (E_1) et (E_2).

Exemple 2

Résolvons l'équation (E) :
$$x^2 = 5$$
$$x^2 - 5 = 0$$
$$x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$$
$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est constitué des solutions de chacune des équations (E_1) et (E_2). Résolvons ces équations :

(E_1)
$$x - \sqrt{5} = 0$$
$$x = \sqrt{5}$$

(E_2)
$$x + \sqrt{5} = 0$$
$$x = -\sqrt{5}$$

$\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ sont les seules solutions de (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$.

MÉTHODE

Pour résoudre une équation d'inconnue x du type $x^2 = a$,
on peut procéder comme suit :
- lorsque a est positif, on transforme cette équation pour la ramener à la forme $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$
- lorsque a est négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution
- l'équation $x^2 = 0$ a une solution unique : 0

Exemple 3

Résolvons l'équation (E) : $6(2x - 5)^2 - (2x - 5)(3x - 1) = 0$

Transformons cette équation :
$$(2x - 5)[6(2x - 5) - (3x - 1)] = 0$$
$$(2x - 5)(9x - 29) = 0$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est constitué des solutions de chacune des équations (E_1) et (E_2). Résolvons ces équations

(E_1)
$$2x - 5 = 0$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

(E_2)
$$9x - 29 = 0$$
$$9x = 29$$
$$x = \frac{29}{9}$$

$\frac{5}{2}$ et $\frac{29}{9}$ sont les seules solutions de (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{5}{2}, \frac{29}{9}\right\}$.

EXERCICE

1.b Résous chacune des équations suivantes.

(E_1) $x\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$; (E_2) $(3x + 1)(1 - 2x) = 0$; (E_3) $5x(x + 1)(x - \sqrt{3}) = 0$;

(E_4) $9 - 25x^2 = 0$; (E_5) $(x + 3)^2 = (2x + 3)^2$; (E_6) $(x + 3)^2 - 7 = 0$.

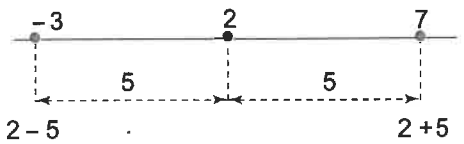
1.3 ÉQUATIONS DU TYPE $|x - a| = b$

Exemple 1

Résolvons l'équation (E) : $|x - 2| = 5$.

On sait que $|x - 2|$ est la distance de x à 2.
Résoudre l'équation (E) revient donc à déterminer tous les nombres dont la distance à 2 est 5.

Les nombres dont la distance à 2 est 5 sont -3 et 7.
L'ensemble des solutions de (E) est $\{-3 ; 7\}$.

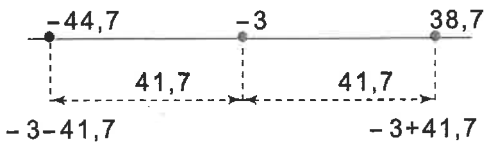


Exemple 2

Résolvons l'équation (E) : $|x + 3| = 41,7$.

On peut écrire (E) $|x - (-3)| = 41,7$.

Les solutions de (E) sont tous les nombres dont la distance à (-3) est égale à 41,7.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{-44,7 ; 38,7\}$.



EXERCICE

1.c Résous les équations :

(E_1) $|x| = 3$; (E_2) $|x - \sqrt{3}| = \frac{3}{2}$, (E_3) $|x + 5| = 7$.

2 Inéquations du 1er degré dans ℝ

2.1 INÉQUATIONS DU TYPE $ax + b < cx + d$

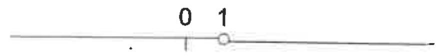
Exemple

Résolvons l'inéquation (I) : $6x - 3 < 4x - 1$

En utilisant les propriétés vues en classe de 4e, on transforme l'inéquation (I) pour la ramener à une inéquation du type $x < u$ ou du type $x > u$.

(I)
$$6x - 4x < -1 + 3.$$
$$2x < 2$$
$$x < 1$$

Les seules solutions de l'inéquation (I) sont les nombres plus petits que 1.



Ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $]\leftarrow;1[$.

EXERCICE

2.a Résous chacune des inéquations suivantes et représente graphiquement l'ensemble de leurs solutions

(I_1) $2x + 3 \leq 3x + 1$; (I_2) $x \geq -2x + 1$; (I_3) $6x - 5 - 2(x + 3) < 0$;

(I_4) $8 - (x - 7) \leq 4 + 3x$; (I_5) $3 - 2x \geq 0$; (I_6) $5x - 10 \leq 3x + 2$.

2.2 SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DANS ℝ

Notion de système d'inéquations

On donne les inéquations (I) $2x - 3 < 0$ et (J) $4x + 5 \geq 0$.
On veut trouver les nombres qui sont solutions à la fois des inéquations (I) et (J).

Pour indiquer que l'on s'intéresse aux solutions communes à ces deux inéquations, on les écrit l'une en dessous de l'autre et on les relie par une accolade.
On obtient ainsi **le système de deux inéquations d'inconnue** x : $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$

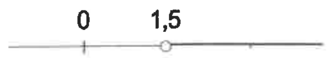
Résoudre ce système, c'est trouver l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations.

Exemple 1

Résolvons le système : $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$

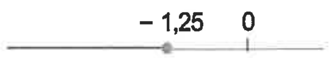
Résolvons chacune des deux inéquations (I) et (J) qui constituent ce système :

(I) $2x - 3 < 0$
$x < 1,5$

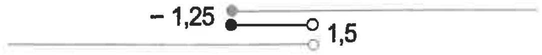


Ensemble des solutions de (I) :]←;1,5[

(J) $4x + 5 \geq 0$
$x \geq -1,25$



Ensemble des solutions de (J) : [–1,25;→[



L'ensemble des solutions du système est [– 1,25 ; 1,5[.

Exemple 2

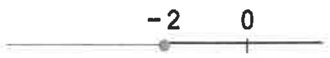
Résolvons le système : $\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1 \\ 7x + 6 \leq 2x - 4 \end{cases}$

Résolvons chacune des deux inéquations (I) et (J) qui constituent ce système :

(I) $5x - 2 > 2x + 1$
$x > 1$

Ensemble des solutions de (I) :]1;→[.

(J) $7x + 6 \leq 2x - 4$
$x \leq -2$



Ensemble des solutions de (J) :]←;–2].

Les inéquations (I) et (J) n'ont aucune solution commune. Donc l'ensemble des solutions du système ne contient aucun élément, c'est **l'ensemble vide.**

Exercice

2.b Résous chacun des systèmes d'inéquations suivants.

$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 3x + 5 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x + 1,2 < 4x + 5 \\ 8x + 3 \geq 4x + 50 \end{cases}$; $\begin{cases} 12x + 3 \geq 8x - 5 \\ 4x - 5 < 2x + 1 \end{cases}$.

3 Problèmes du 1er degré dans ℝ

3.1 PROBLÈME CONDUISANT À UNE ÉQUATION

Énoncé

À la foire de Nouna, Yempoaka a acheté des œufs à 40 francs l'unité. Sa fille Nongba, très turbulente, en casse 10. Elle revend le reste à 50 francs l'unité et réalise un bénéfice égal au huitième du prix d'achat des œufs.

a) *Combien d'œufs Yempoaka a-t-elle achetés à la foire ?*
b) *Quel était le bénéfice réalisé ?*

(D'après B.E.P.C. BURKINA- FASO)

Solution

LANGAGE COURANT

Lecture de l'énoncé

Ce que je cherche :
- Le nombre d'œufs achetés à la foire.
- Le bénéfice réalisé par Yempoaka.

Ce que je connais :
- Yempoaka a acheté les œufs à 40 francs l'unité.
- Sa fille en a cassé 10.
- Le reste des œufs est revendu à 50 francs l'unité.
- Le bénéfice réalisé est égal au huitième du prix d'achat.

LANGAGE MATHÉMATIQUE

Traduction mathématique

Choix de l'inconnue :
- Je désigne par x le nombre d'œufs achetés par Yempoaka.

x est un nombre entier naturel plus grand que 0.

Mise en équation :
- Prix d'achat des œufs (en F) : $40x$
- Nombre d'œufs vendus : $x - 10$
- Prix de vente des œufs (en F) : $50(x - 10)$
- Bénéfice réalisé (en F) : $\frac{40x}{8}$ c'est-à-dire $5x$

Prix de vente = prix d'achat + bénéfice
$50(x - 10) = 40x + 5x$

Résolution de l'équation

$$50(x - 10) = 40x + 5x$$
$$50x - 500 = 45x$$
$$50x - 45x = 500$$
$$5x = 500$$
$$x = 100$$

Vérifications et solution du problème

Le nombre 100, solution de l'équation, vérifie-t-il les données du problème ?

Prix d'achat, en F : $40 \times 100 = 4\,000$
Prix de vente, en F : $50 \times 90 = 4\,500$
Bénéfice réalisé : $4\,500 - 4\,000 = 500$

On a : $\frac{500}{4\,000} = \frac{1}{8}$

Yempoaka a acheté 100 œufs à la foire.
Le bénéfice réalisé est 500 francs.

Exercices

3.a Au cours du trimestre, Lise a obtenu quatre notes en mathématiques : 10 ; 13 ; 11 et 14. Quelle devrait être la cinquième note de Lise pour qu'elle obtienne une moyenne égale à 13 ?

3.b Dans un triangle ABC, la mesure de l'angle $\widehat{A}$ est 33°, et la mesure de l'angle $\widehat{B}$ est le double de celle de $\widehat{C}$. Calcule les mesures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

3.2 PROBLÈME CONDUISANT À UNE INÉQUATION

Énoncé

Le lycée de Batouri se propose d'acheter en gros les manuels de Troisième de la C.I.A.M. MAXILIB et MINIPRO, les deux librairies de Bertoua, chef-lieu de la Province, lui font les propositions suivantes :
– Proposition de MAXILIB : 2 700 F par manuel acheté, plus 5 200 F de frais pour l'expédition des manuels, ceci, quel qu'en soit le nombre.
– Proposition de MINIPRO : 2 600 F par manuel acheté, les frais d'acheminement étant à la charge de l'acheteur.
Par ailleurs, pour aller à Bertoua, l'intendant du lycée doit débourser la somme de 9 000 F pour frais divers (voyage, repas, etc ...).
À partir de quel nombre de manuels la proposition de MINIPRO est-elle plus avantageuse que celle de MAXILIB ?

Solution

LANGAGE COURANT

Lecture de l'énoncé

Ce que je cherche :
- Le nombre de livres à partir duquel la proposition de MINIPRO est plus avantageuse que celle de MAXILIB.

Ce que je connais :
- MAXILIB : 2 700 F par manuel acheté plus 5 200 F de frais d'expédition.
- MINIPRO : 2 600 F par manuel acheté plus 9 000 F de frais d'acheminement.

LANGAGE MATHÉMATIQUE

Traduction mathématique

Choix de l'inconnue :
- Je désigne par x le nombre de manuels achetés ;

x est un nombre entier naturel non nul.

Mise en équation :
- Prix de revient de x manuels avec MAXILIB : $2\,700x + 5\,200$
- Prix de revient de x manuels avec MINIPRO : $2\,600x + 9\,000$
- A partir de x livres, la proposition de MINIPRO est plus avantageuse que celle de MAXILIB.

$$2\,600x + 9\,000 < 2\,700x + 5\,200$$

Résolution de l'équation

$$2\,600x + 9\,000 < 2\,700x + 5\,200$$
$$2\,600x - 2\,700x < 5\,200 - 9\,000$$
$$-100x < -3\,800$$
$$x > 38$$

Vérifications et solution du problème

Je montre qu'au-dessus de 38 manuels la proposition de MINIPRO est plus avantageuse que celle de MAXILIB.

– Pour 39 manuels :

$2\,600x + 9\,000 = 2\,600 \times 39 + 9\,000 = 110\,400$

$2\,700x + 5\,200 = 2\,700 \times 39 + 5\,200 = 110\,500$

La proposition de MINIPRO est plus avantageuse que celle de MAXILIB pour plus de 38 manuels.

EXERCICE

3.c Un représentant commercial a un salaire mensuel de 135 000 francs et une prime mensuelle de 2,5% sur le montant de ses ventes.
Quel total de ventes doit-il réaliser pour avoir un salaire supérieur ou égal à 150 000 francs ?

EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 ÉQUATIONS DANS ℝ

1 Résous chacune des équations suivantes :
$5x + 3 = 2x - 4$; $7(x - 3) - 8(x + 2) = 0$;
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}x + 2$; $2x - \frac{3}{4}(1 - 5x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$;
$\frac{2}{3} - \frac{3}{4}(x - 1) = 2 - \frac{7}{2}x$; $x\sqrt{2} + 5 = 0$;
$(1 + 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} + 2 = 0$.

2 Résous chacune des équations suivantes :
$x(x - 3) = 0$; $(3x + 1)(1 - 2x) = 0$; $(3x - 7)^2 = 0$
$(x - 1)(2x + 3) - (x - 1)(5 - 4x) = 0$;
$(3x - 7)^2 - (1 - 5x)(3x - 7) = 0$; $25x^2 - 9 = 0$
$81 - 36x^2 = 0$; $x^2 - 7 = 0$; $3x^2 - 5 = 0$;
$x^2 + 1 = 0$; $9x^2 + 7 = 0$; $\frac{9}{4} - 5x^2 = 0$;
$(3x + 7)^2 - x^2 = 0$; $4x^2 - (2x + 5)^2 = 0$.

3 Résous chacune des équations suivantes :
$|x| = 2$; $|x + 5| = 0$; $|x - 4| = 7$; $|x + 2| = 9$
$|x + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$; $\left|x - \frac{2}{3}\right| = \frac{3}{4}$.

4 Après le cours sur les équations, le professeur de Mathématiques envoie trois élèves au tableau pour résoudre l'équation suivante : $7x + 21 = 56$.
Les rédactions proposées sont les suivantes :

Production du 1er élève	Production du 2e élève	Production du 3e élève
$7x + 21 = 56$ $7x = 35$ $x = 28$	$7x + 21 = 56$ $7(x + 3) = 56$ $x + 3 = 49$ $x = 43$	$7x + 21 = 56$ $7(x + 3) = 56$ $x + 3 = 8$ $x = 5$

Un seul élève a trouvé la solution. Lequel ?
Retrouve les erreurs commises par les deux autres.

2 INÉQUATIONS DANS ℝ

5 À chaque inéquation, associe l'ensemble de ses solutions :
Inéquation (I) : $7x - 2 < -2x + 5$;
$]\frac{9}{7} ;\rightarrow[$; $[\frac{7}{5} ;\rightarrow[$; $]\leftarrow; \frac{7}{9}]$; $]\leftarrow; \frac{7}{9}[$
Inéquation (J) : $3(x - 1) + 4x + 3 \geq 8x + 2$;
$]-2 ;\rightarrow[$; $[-2 ;\rightarrow[$; $]\leftarrow; -2]$; $]\leftarrow; -2[$

6 Résous chacune des inéquations suivantes et écris l'ensemble de ses solutions sous la forme d'un intervalle de ℝ :
$3x + 1 \leq 0$; $\frac{1}{2}x + 5 \geq 0$; $5x + 3 > 2x - 4$;
$3x - 3 \geq -5x + 6$; $-5x + 8 < 6x + 2$;
$2x + 7 \leq 1 - x$; $-13x + 15 > -6x + 6$;
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \geq \frac{5x}{6} + 2$; $\frac{x + 2}{4} \leq x - \frac{1}{3}$;
$\frac{5x - 6}{7} > \frac{2x - 1}{14}$; $\frac{x + 2}{2} - \frac{x + 5}{6} \geq \frac{2x}{3} - \frac{3}{4}$.

7 Lors d'une séance d'exercices après le cours sur les inéquations, le professeur de Mathématiques envoie trois élèves au tableau pour résoudre l'inéquation suivante :
$-5x + 4 < -11$.
Les rédactions proposées sont les suivantes :

Production du 1er élève	Production du 2e élève	Production du 3e élève
$-5x + 4 < -11$ $-5x < -15$ $x < -10$	$-5x + 4 < -11$ $-5x < -15$ $x > 3$	$-5x + 4 < -11$ $x - \frac{4}{5} < \frac{11}{5}$ $x < 3$

Un seul élève a trouvé l'ensemble des solutions. Lequel ?
Retrouve les erreurs commises par les deux autres.

8 Résous chacun des systèmes d'inéquations suivants, représente graphiquement l'ensemble de ses solutions et écris-le sous la forme d'un intervalle de ℝ :

(1) $\begin{cases} 4x - 1 > x + 2 \\ 7 - 5x \geq 1 - 3x \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 1 \leq x + 3 \\ x - \frac{1}{2} < 2(x - 1) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x < \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ x - \frac{1}{2} < 2x + \frac{5}{2} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -x + 3 > 3x - 2 \\ 3x + 2 < 5x + 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x \geq 2x + \frac{2}{3} \\ -3x + 1 < x + 3 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 3x - \frac{2}{3} \geq 2x + 1 \\ -x + 1 < 4x - \frac{1}{2} \end{cases}$

9 $[-\frac{7}{2};\frac{11}{3}[$, $]-\frac{7}{2};\frac{11}{3}[$, $]-\frac{7}{2};\frac{11}{3}]$ et $[-\frac{7}{2};\frac{11}{3}]$
Un seul de ces quatre intervalles est l'ensemble des solutions du système d'inéquations :
$\begin{cases} 3x + 2 > x - 5 \\ -x + 4 > 2x - 7 \end{cases}$

Sans effectuer de calculs, l'examen attentif des intervalles proposés te permet d'en éliminer trois. Lesquels et pourquoi ?

10 Chacun des trois intervalles

$]-6;\frac{1}{4}]$, $]-\frac{5}{3};1[$, $[-\frac{1}{2};\frac{5}{3}]$

est l'ensemble des solutions de l'un des systèmes d'inéquations (I_1), (I_2), (I_3) suivants :

$(I_1)\begin{cases} x+1<-3x+5 \\ 2x-7<5x-2 \end{cases}$ $\quad(I_2)\begin{cases} -x+4\geq -7x+1 \\ 5x-1\leq 2x+4 \end{cases}$

$(I_3)\begin{cases} \frac{1}{2}x+3<\frac{2}{3}x+4 \\ 3x-\frac{3}{4}\leq -4x+1 \end{cases}$

Sans effectuer de calculs, associe chacun des systèmes à l'ensemble de ses solutions.

3 PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R}$

11 Si on diminue de 2 cm le côté d'un carré son aire diminue de 20 cm^2.
Quelle est la mesure du côté du carré initial ?

12 Je cherche cinq nombres entiers naturels consécutifs dont j'ai oublié la somme. Je ne sais plus si cette somme est 354, 345 ou 534.
Aide-moi à retrouver cette somme et ces nombres.

13 Issa dit à son ami Youssouf : « Prends trois fois mon âge dans trois ans et enlève trois fois mon âge il y a trois ans, tu obtiendras mon âge actuel ».
Aide Youssouf à retrouver l'âge d'Issa.

14 Lors du dernier contrôle trimestriel, Rakoto a obtenu 14 en Français, 13 en Anglais et une note en Mathématiques qu'il a oubliée. Par contre il sait qu'il a eu 15 de moyenne sur ces trois matières. Sachant que les coefficients en Français, Anglais et en Mathématiques sont respectivement 4, 3 et 4, calcule la note de Mathématiques de Rakoto.

15 Les camions d'une usine transportent des caisses de 55 kg. Certains camions pèsent 2,5 tonnes à vide et ont un poids total en charge maximum de 8 tonnes, les autres camions pèsent 3,5 tonnes à vide et ont un poids total en charge maximum de 10,5 tonnes. Quel est le nombre maximal de caisses que peut légalement transporter chaque type de camion ?

16 Un père a 27 ans de plus que son fils. Dans six ans, l'âge du père sera le double de l'âge du fils. Trouve l'âge de chacun d'eux.

17 Après la dévaluation du franc CFA, un article a subi deux augmentations successives : l'une de 40 % et l'autre de 50 %. Son prix est alors de 46 410 F.
Quel était son prix avant la dévaluation ?

18 Wend-Kuni a 200 francs en pièces de 5 F et de 10 F. Il a deux fois plus de pièces de 10 F que de pièces de 5 F.
Combien a-t-il de pièces de 5 F et de 10 F ?

19 Avec le prix de douze crayons à bille, d'un compas à 240 francs et d'une règle graduée à 110 francs, je peux acheter quatre cahiers à 320 francs chacun mais pas cinq.
Quels peuvent être les prix possibles d'un crayon à bille sachant que ce sont des multiples de 10 ?

20 La longueur d'un rectangle est 12 cm.
Trouve un encadrement de sa largeur pour que son périmètre soit plus petit que 44 cm et son aire plus grande que 60 cm^2.

21 L'unité de longueur est le m.
La mesure du côté d'un triangle équilatéral est x et la mesure du côté d'un carré est $2x$.
Calcule x pour que le périmètre du carré dépasse de 10 mètres celui du triangle.

22 La somme de quatre nombres entiers naturels consécutifs est plus grande que 1 939 et plus petite que 1 945.
Quels sont ces quatre nombres entiers naturels ?

23 Au premier trimestre, Kouroumé a eu sept notes en Mathématiques, dont la moyenne est 13,5 sur 20. Le professeur va donner un dernier devoir pour clore le trimestre.
1) Donne un encadrement de la note du dernier devoir, qui permettrait à Kouroumé d'obtenir une moyenne supérieure ou égale à 14.
2) Peut-elle espérer obtenir une moyenne plus grande que 15 avec ce seul devoir supplémentaire ?

24 Djénabou va acheter des bouteilles de jus de fruits chez son boutiquier habituel. Pour un carton de 12 bouteilles, elle paiera moins de

1 440 F et pour un carton de 24 bouteilles, elle paiera plus de 2 640 F. Quels sont les prix possibles d'une bouteille de jus de fruits sachant que son prix est un nombre entier de francs ?

25 Seo-Ah va au marché pour acheter des pagnes. Un commerçant lui propose deux qualités ; la première à 2 500 F le pagne, la seconde à 3 750 F le pagne.
Elle se fixe les contraintes suivantes pour ses achats :
– acheter une seule qualité de pagne ;
– dépenser plus de 37 000 F et moins de 53 000 F.
Quel nombre de pagnes pourra-t-elle acheter dans la qualité à 2 500 F ? Dans la qualité à 3 750 F ?

APPROFONDISSEMENT

26 Résous chacune des équations suivantes :
1) $\frac{3}{4}(x-3)-5x+2=3-\frac{1}{3}(2-5x)+32-4x.$
2) $\frac{3x+4}{3}-\frac{5x-1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{x}{6}+\frac{2x+7}{4}.$
3) $\frac{2}{7}x-\frac{7}{2}=\frac{3-x}{2}-(x-20).$
4) $\sqrt{2x}-1=3x+\sqrt{3}.$
5) $x+4\sqrt{2}-1=3x\sqrt{2}-4.$
6) $x\sqrt{5}+x\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\sqrt{5}.$
7) $x^2-2x+2=x^2+1.$
8) $(3x-2)^2=5x^2+(2x+1)^2.$

27 Résous dans IR chacune des équations suivantes :
$-3x(2x+3)(5-4x)=0$; $(2x-5)(3x+4)^2=0$
$(x^2-9)(1-4x)=0$; $49x^2-64=0$;
$121-81x^2=0$; $x^2-6x+9=0$;
$4x^2+20x+25=0$; $-\frac{1}{4}x^2-x+1=0$;
$(3x+8)(3-x)+(2x+1)(x-3)=0$;
$(5x+7)(1-2x)-(4x-2)(x-5)=0$;
$x^2-(3x+5)^2=0$; $(3x+1)^2-9x^2=0$;
$(3x-1)^2-(2x-7)^2=0$; $36x^2-(4x-1)^2=0$;
$(1-3x)^2-9(x-5)^2=0$; $3(x+1)^2-2x^2=0$;
$(x-\sqrt{5})(x-2)=4(x^2-5)$;
$(2x-3)(x-1)^2=4(2x-3).$

28 Résous chacune des inéquations suivantes :
1) $-x-\frac{2}{3}+\frac{x}{3}<2x-1-\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{3}$
2) $\frac{x+3}{4}+1<x-\frac{x+1}{2}$
3) $\frac{x-3}{2}-\frac{3x+5}{7}>\frac{2-13x}{14}-\frac{1}{3}$
4) $-\frac{x-3}{2}+\frac{3x-5}{3}-\frac{1}{4}\leq\frac{1}{6}-\frac{x-1}{12}$

29 Une entreprise emploie 54 ouvriers, 3 contremaîtres et est dirigée par un directeur. Les ouvriers ont tous le même salaire mensuel, les contremaîtres gagnent chacun 30 000 F de plus qu'un ouvrier, quant au directeur il gagne quatre fois plus qu'un contremaître plus une prime de 50 000 F pour ses frais de représentation.
Sachant que le total des salaires mensuels de tous les employés de l'entreprise, directeur y compris, s'élève à 3 493 000 F, calcule le salaire mensuel d'un ouvrier, d'un contremaître et du directeur.

30 Trouve cinq nombres entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres.

31 **L'heure énigmatique**
Khady demande l'heure à Fatimatou qui lui répond de manière énigmatique : « Pour le savoir, il te suffit d'ajouter au temps à passer jusqu'à midi les quatre cinquième du temps passé depuis minuit ».
Quelle heure est-il ?

32 Pendant le cours de Chimie, le professeur Inotou veut préparer une solution d'acide chlorhydrique diluée à partir d'acide concentré et d'eau.
Pour cela il ne dispose que de deux verres gradués en centilitres et contenant chacun une même quantité de liquide :
– le 1er verre contient de l'acide chlorhydrique concentré ;
– le 2^e verre contient de l'eau.
Il commence par verser 20 cl d'acide chlorhydrique concentré du 1er verre dans le 2^e verre.
Les deux tiers de la solution obtenue dans le 2^e verre sont ensuite versés dans le 1er verre.
Après ces deux manipulations, il constate que le 1er verre contient 4 fois plus de liquide que le 2^e verre, mais au moment de faire ses calculs de concentration, il s'aperçoit qu'il a oublié de noter la quantité d'eau et d'acide chlorhydrique concentré qu'il avait au départ.
Peux-tu aider le professeur Inotou à retrouver cette quantité ?

EXERCICES

33 Mme Bieme vend des avocats au marché du Mfoundi à Yaoundé.
Au 1er client de la journée elle donne un demi-avocat pour goûter. Le client, satisfait, achète la moitié des avocats entiers restants. Au 2e client, elle donne l'autre demi-avocat pour goûter, le client achète alors la moitié des avocats restants. Pour le 3e client, elle coupe un second avocat en deux, lui en donne une moitié pour tester, ce client achète alors le quart des avocats entiers restants. Le 4e client reçoit l'autre demi-avocat et achète les neuf avocats qui restent sur l'étalage.
Combien Bieme avait-elle d'avocats au début de la journée ?

34 La Société Judananas veut embaucher des représentants afin de commercialiser ses produits sur le marché intérieur. Elle propose à chaque candidat les deux conditions de rémunérations mensuelles suivantes :
1) Une commission de 10 % sur le montant total des ventes du mois.
2) Un salaire fixe de 90 000 F par mois plus une commission de 5 % sur le montant total des ventes du mois.
Trouve, selon le montant total des ventes mensuelles, le système de rémunération le plus avantageux pour un représentant.

35 L'éternel problème de l'impôt
En des temps anciens, le souverain d'un royaume proposait à ses sujets de choisir l'une des trois façons suivantes de payer l'impôt :
– *1re façon :* donner la moitié de leur récolte (exprimée en sacs de mil) ;
– *2e façon :* donner le tiers de leur récolte (exprimée en sacs de mil) et un mouton, un mouton valant 3 sacs de mil ;
– *3e façon :* donner le sixième de leur récolte (exprimée en sacs de mil), un bœuf et un mouton, un bœuf valant 5 moutons.
Compare ces trois façons de payer l'impôt pour un sujet et déduis-en, suivant la récolte, la façon la plus avantageuse pour lui de payer l'impôt.

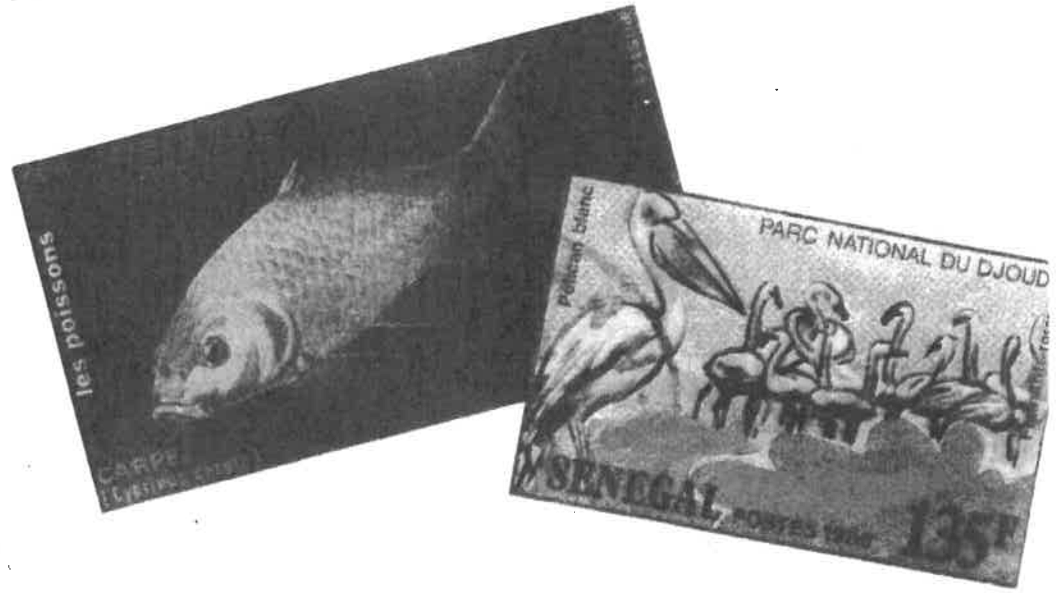
RECHERCHE

36 Quelque part en Afrique
Un des États de la côte de l'Afrique de l'Ouest possède une nappe de gaz naturel située pour une partie dans le sous-sol de sa zone terrestre et pour l'autre partie sous la mer dans la zone maritime de ses eaux territoriales. La superficie de sa zone maritime est égale au tiers de la superficie de sa zone terrestre.
De plus, cet état a trois fois plus de km^2 de zone terrestre ayant du gaz naturel que de zone maritime sans gaz et le septième de son territoire sans gaz naturel est situé dans sa zone maritime.
Quelle est la fraction de la nappe de gaz naturel située sous la mer ?
(Tu pourras faire une esquisse représentant la situation et tu pourras poser :
• S, superficie totale de l'état (terrestre et maritime)
• x, fraction de la superficie totale représentant la zone maritime sans gaz naturel).

37 Vitesse moyenne et moyenne des vitesses
Kassi a parcouru en courant sans s'arrêter la distance aller retour qui sépare sa maison de l'école. À l'aller, il a couru à la vitesse de 12 km/h et au retour, fatigué, il a parcouru la même distance par le même chemin à 8 km/h.
À son arrivée, il demande à son ami Séry quelle devrait être sa vitesse moyenne s'il devait faire l'aller et retour sans changer d'allure et dans le même temps total que précédemment.
Séry lui dit après un rapide calcul : « C'est évidemment, 10 km/h ». Kassi lui répond : « J'y pensais, mais cela me semble trop simple ».
Explique comment Séry a trouvé 10 km/h et explique pourquoi cette réponse est inexacte.
Calcule alors cette vitesse moyenne.

38 À tire d'aile et à vol d'oiseau
Au même instant, un premier avion quitte Bangui pour Ndjamena et un second avion quitte Ndjamena pour Bangui. Ils volent à des altitudes différentes et à des vitesses constantes, le premier avion étant plus rapide que le second. Ils se croisent une 1re fois à 423 km de Ndjamena, puis l'un après l'autre ils atterrissent et restent deux heures au sol pour débarquer les passagers, refaire le plein et reprendre d'autres passagers. Ensuite, chacun d'eux repart vers son point de départ à la même vitesse qu'à l'aller. Ils se croisent alors une 2e fois à 325 km de Bangui.
Quelle est la distance à vol d'oiseau entre Bangui et Ndjamena ? (*On supposera que les avions volent en ligne droite et que la différence d'altitude n'intervient pas dans la distance parcourue*).

14 Équations Inéquations dans ℝ × ℝ



*Faye écrit de Dakar à son ami Ramanantsoa à Antananarivo.
Après avoir fait peser sa lettre à la poste, on lui répond qu'il doit l'affranchir à 540 F, mais la postière ne peut lui proposer que des timbres à 135 F et à 180 F.
Quelles sont les différentes possibilités que peut choisir Faye pour timbrer sa lettre ?*

SOMMAIRE

1 Systèmes d'équations du 1^er^ degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Il est indispensable de traiter « ÉQUATIONS DE DROITES » avant d'aborder cette leçon.

1.1 RÉSOLUTION GRAPHIQUE

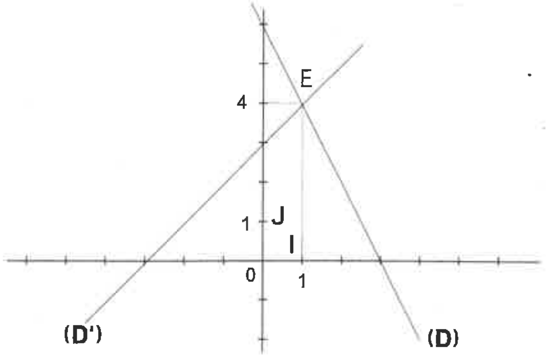
Notion de système d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On donne les équations (1) $2x + y - 6 = 0$ et (2) $x - y + 3 = 0$.
On veut trouver les couples qui sont solutions à la fois des équations (1) et (2).
Pour indiquer que l'on s'intéresse aux solutions communes à ces deux équations, on les écrit l'une en dessous de l'autre et on les relie par une accolade.

On obtient ainsi **le système de deux équations d'inconnue** (x ; y) : $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

Résoudre ce système, c'est trouver l'ensemble des solutions communes aux deux équations.

Exemple



Résolvons graphiquement le système :

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 & (1) \\ x - y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

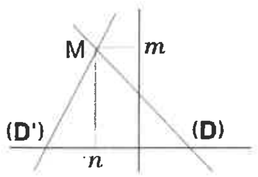
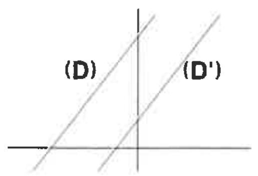
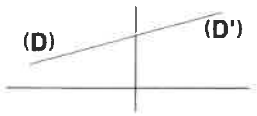
Dans le plan muni du repère (O, I, J), on a tracé :
– la droite (D) d'équation $2x + y - 6 = 0$
– la droite (D') d'équation $x - y + 3 = 0$.
Ces droites sont sécantes, car leurs coefficients directeurs, – 2 et 1, sont différents.
E(1;4) est leur point d'intersection.

• Vérifie par le calcul que (1; 4) **est la solution du système.**

MÉTHODE

Pour résoudre graphiquement le système de deux équations $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$

• on trace les droites : (D) d'équation $ax + by + c = 0$ et (D') d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.
Il y a trois cas de figure :

(D) et (D') sont sécantes en M(m;n)  • on conclut : (m;n) est la solution du système	(D) et (D') n'ont pas de point commun.  • on conclut : Le système n'a pas de solution.	Les droites (D) et (D') sont confondues.  • on conclut : Le couple de coordonnées de chacun des points de (D) est solution du système.

EXERCICES

1.a Résous graphiquement les systèmes d'équations suivants.

$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION

Exemple

On veut résoudre le système : $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 & (1) \\ 4x - 5y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

Interprétation graphique du système d'équations

Le plan est muni d'un repère.
(D) est la droite d'équation : $2x + 3y - 1 = 0$.
(D') est la droite d'équation : $4x - 5y - 2 = 0$.

Les droites (D) et (D') sont sécantes, car leurs coefficients directeurs $\left(-\frac{2}{3}\right)$ et $\frac{4}{5}$ sont différents.

Le système admet donc une solution et une seule.

Recherche de la solution du système d'équations

Expression de y en fonction de x
Dans l'équation (1), on exprime y en fonction de x.

$$2x + 3y - 1 = 0 \quad (1)$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Détermination de la valeur de x
Dans l'équation (2), on remplace y par son expression.

$$4x - 5y - 2 = 0 \quad (2)$$
$$4x - 5\left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) - 2 = 0$$
$$x = 0{,}5$$

Détermination de la valeur de y
Dans l'expression de y en fonction de x, on remplace x par sa valeur.

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$
$$y = -\frac{2}{3} \times 0{,}5 + \frac{1}{3}$$
$$y = 0$$

Vérification
On vérifie que le couple (0,5 ; 0) est solution de chacune des équations (1) et (2).

Solution
Le système a pour unique solution le couple (0,5 ; 0)

X C CE

Résous par substitution chacun des systèmes d'équations suivants.

$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 4{,}14 \\ 5x + 8y = 32{,}64 \end{cases}$

1.3 RÉSOLUTION PAR COMBINAISON

Exemple

On veut résoudre le système : $\begin{cases} -2x + 3y - 1 = 0 & (1) \\ 3x - 4y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

Interprétation graphique du système d'équations

Le plan est muni d'un repère.
(D) est la droite d'équation : $-2x + 3y - 1 = 0$.
(D') est la droite d'équation : $3x - 4y + 2 = 0$.

Les droites (D) et (D') sont sécantes, car leurs coefficients directeurs $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont différents.
Le système admet donc une solution et une seule.

Recherche de la solution du système d'équations

Élimination de x

On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 3 ; on obtient : $-6x + 9y - 3 = 0$
On multiplie chaque membre de l'équation (2) par 2 ; on obtient : $6x - 8y + 4 = 0$

On additionne membre à membre les équations obtenues ; on obtient : $0 + y + 1 = 0$

$y = -1$

Élimination de y

On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 4 ; on obtient : $-8x + 12y - 4 = 0$
On multiplie chaque membre de l'équation (2) par 3 ; on obtient : $9x - 12y + 6 = 0$

On additionne membre à membre les équations obtenues ; on obtient : $x + 0 + 2 = 0$

$x = -2$

Vérification

On vérifie que le couple $(-2 ; -1)$ est solution de chacune des équations (1) et (2).

Solution
Le système a pour unique solution le couple $(-2 ; -1)$

XERCICES

1.c Résous par combinaison chacun des systèmes suivants.

$\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8x - 5y - 3 = 0 \\ 4x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8x - 15y + 5 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$

2 Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2.1 NOTION D'INÉQUATION DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Inéquation pour résoudre un problème

Magida veut acheter des cahiers de 100 pages à 280 F et des cahiers de 200 pages à 480 F pour le compte d'une association de quartier.
Combien Magida peut-elle acheter de cahiers de 100 pages et de cahiers de 200 pages sans dépasser le budget de 5 000 F qui lui est alloué ?

Pour résoudre ce problème, on pourra traduire cette situation par une inéquation.

Choix des inconnues :
On désigne par x le nombre de cahiers de 100 pages et par y le nombre de cahiers de 200 pages que peut acheter Magida.

Mise en équation :
Somme à payer pour l'achat des cahiers de 100 pages : $280x$
Somme à payer pour l'achat des cahiers de 200 pages : $480y$
Somme à payer pour l'achat des cahiers : $280x + 480y$

On peut traduire la condition : « Cette somme doit être inférieure ou égale à 5 000 F » par :

(I) $280x + 480y \leq 5\,000$.

On a obtenu une inéquation (I) d'inconnues x et y ; c'est **une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.**

Dans cette inéquation :
- si on donne à x la valeur 5 et à y la valeur 10, c'est à dire, si $(x ; y) = (5 ; 10)$, alors l'inéquation (I) devient une phrase fausse.
- si on donne à x la valeur 3 et à y la valeur 2, c'est à dire, si $(x ; y) = (3 ; 2)$, alors l'inéquation (I) devient une phrase vraie.

On dit que (3 ; 2) vérifie l'inéquation (I), ou que (3 ; 2) est **une solution de l'inéquation** (I).

• Parmi les couples suivants, trouve ceux qui sont solutions de l'inéquation (I), puis ceux qui sont solutions du problème de Magida : (10 ; 9), (4 ; 8), (−4 ; 10), (404 ; −205), (2,5 ; 2,5), (−12 ; 27), (14 ; 2), (8,5 ; 4), (14 ; 2,25), (0 ; 11), (15 ; 0), (7 ; 7), (−1,3 ; 2).

Transformation d'une inéquation

On veut transformer l'inéquation (I) $280x + 480y \leq 5\,000$.

Explique pourquoi chacune des inéquations suivantes a les mêmes solutions que l'inéquation (I).

(I') $7x + 12y \leq 125$

$12y \leq 125 - 7x$	$7x \leq 125 - 7y$
(I'₁) $y \leq \dfrac{125}{12} - \dfrac{7x}{12}$	(I'₂) $x \leq \dfrac{125}{7} - \dfrac{12y}{7}$

Recherche de solutions d'une inéquation

Pour trouver des solutions de l'inéquation (I), on peut utiliser indifféremment (I'_1) ou (I'_2).

Dans (I'_1), donnons une valeur particulière à x, par exemple la valeur 5.

On obtient : $y \leq \dfrac{45}{6}$

Ainsi, $(5 ; \frac{45}{6})$, $(5 ; \frac{43}{6})$, $(5 ; -2)$, ...

dont des solutions de (I) ayant 5 pour première composante.

Dans (I'_2), donnons une valeur particulière à y, par exemple la valeur 10.

On obtient : $x \leq \dfrac{5}{7}$

Ainsi, $(\frac{5}{7} ; 10)$, $(0{,}12 ; 10)$, $(-34 ; 10)$; ...

sont des solutions de (I) ayant 10 pour deuxième composante

XERCICE

2.a On donne l'inéquation (J) $47x + 3{,}9y > 13$

Trouve deux solutions de (J), dont la première composante est (-6), et deux solutions de (J), dont la deuxième composante est 7,3.

2.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Activité

10	0	2	4	6	8	10	12	14
8	−2	0	2	4				12
6	−4	−2	0				8	10
4	−6	−4	−2					8
2	−8	−6						6
0	−10	−8						4
2	−12	−10	−8	−6	−4	−2		2
y/x	−2	−1	0	1	2	3	4	5

On désigne par A l'expression littérale : $2x + y - 6$.

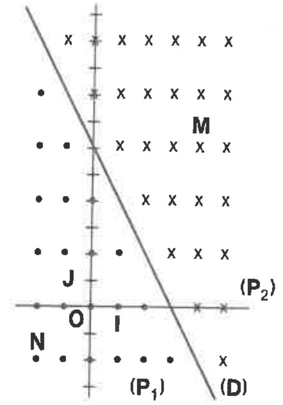
Dans le chapitre 5 tu as complété le tableau ci-contre en calculant des valeurs numériques de A

- Cite deux couples tels que : $A > 0$
  Cite deux couples tels que : $A = 0$
  Cite deux couples tels que : $A < 0$

On a vu que la recherche des couples de nombres pour lesquels A est nul conduit à une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: (E) $2x + y - 6 = 0$

Les solutions de (E) sont les couples de coordonnées des points de la droite (D) : $2x + y - 6 = 0$

Qu'en est-il des couples de nombres pour lesquels A est positif ou A est négatif ?
Le tableau précédent montre un regroupement par signe des valeurs de A différentes de 0.



Le plan est muni du repère (O,I,J).

- Pour le couple $(4 ; 6)$, $A = 8$.
On a marqué le point $M(4 ; 6)$ à l'aide d'une croix (✗).
On marque de même les points dont le couple $(x ; y)$ de coordonnées est tel que $A > 0$.

- Pour le couple $(-2 ; -2)$, $A = -12$.
On a marqué le point $N(-2 ; -2)$ à l'aide d'un rond (•).
On marque de même les points dont le couple $(x ; y)$ de coordonnées est tel que $A < 0$.

La droite (D) partage le plan en deux demi-plans (P_1) et (P_2).
On dit que (P_1) et (P_2) sont des **demi-plans de frontière (D).**

Il apparaît que les points marqués d'une croix (✗) sont situés dans l'un de ces demi-plans et les points marqués d'un rond (•) sont dans l'autre demi-plan, aucun de ces points n'appartenant à (D).

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

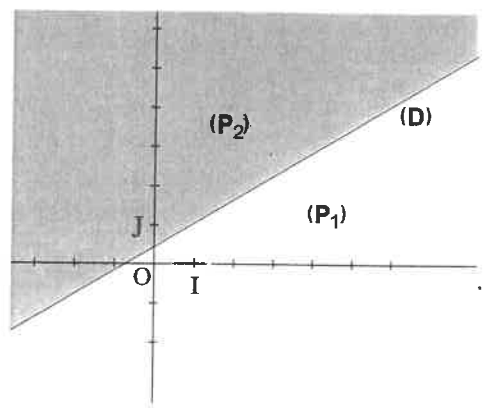
Le plan est muni d'un repère. (D) est la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

La droite (D) partage le plan en trois parties :
– deux demi-plans de frontière (D)
– la droite (D) ;

Les couples de coordonnées des points d'un demi-plan vérifient : $ax + by + c < 0$.
Les couples de coordonnées des points de (D) vérifient : $ax + by + c = 0$.
Les couples de coordonnées des points de l'autre demi-plan vérifient : $ax + by + c > 0$.

Exemple

Représente graphiquement les solutions de l'inéquation (I) $3x + 2 - 5y < 0$



Le plan est muni du repère (O,I,J).

– On trace la droite (D) d'équation : $3x + 2 - 5y = 0$.

On détermine la valeur numérique de l'expression $(3x + 2 - 5y)$, pour le couple $(0 ; 0)$.

On obtient le nombre positif 2.

– On conclut :

Le demi-plan (P_2) de frontière (D) ne contenant par le point O à l'exclusion de la droite (D), représente graphiquement l'ensemble des solutions de (I).

XERCICE

2.b Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes.

$5x + y - 15 < 0$; $2x + 3y < 0$; $-2x - 3y + 2 \geq 0$

2.c Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations d'inconnues x et y suivantes : $x > 0$; $y > 2$

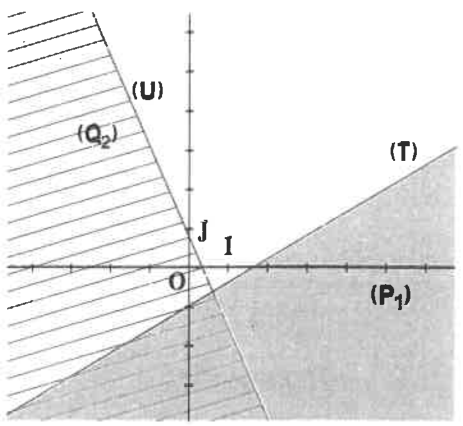
2.3 SYSTÈME DE DEUX INÉQUATIONS

Exemple

Représente graphiquement les solutions du système :

$$(I) \begin{cases} 3x - 7y - 5 > 0 \\ 12x + 5y - 3 < 0 \end{cases}$$

Le plan est muni du repère (O, I, J).
(T) est la droite d'équation $3x - 7y - 5 = 0$;
(U) est la droite d'équation $12x + 5y - 3 = 0$.



– On trace (T) et on détermine le demi-plan (P_1) formé des points dont les coordonnées rendent positive l'expression ($3x - 7y - 5$).

– On trace (U) et on détermine le demi-plan (Q_2) formé des points dont les coordonnées rendent négative l'expression ($12x + 5y - 3$).

– On détermine l'intersection du demi-plan (P_1) à l'exclusion de la droite (T) et du demi-plan (Q_2) à l'exclusion de la droite (U).

– On conclut :
Cette intersection est la représentation graphique de l'ensemble des solutions du système (I).

XERCICE

1.b Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacun des systèmes suivants.

$\begin{cases} 5x + y - 15 < 0 \\ 5x + 7y - 35 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + y + 2 > 0 \\ -2x + y - 3 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x + 3y + 2 > 0 \\ 5x + 6y - 3 < 0 \end{cases}$

3 Problèmes du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

3.1 UTILISATION DE SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Énoncé

Un lingot, composé d'un alliage d'or et de cuivre a un volume de 0,8 dm3 et une masse de 13,5 kg. La masse volumique de l'or est 19,5 kg/dm³, celle du cuivre est de 9 kg/dm³. Calcule les volumes, puis les masses d'or et de cuivre contenus dans ce lingot.

Solution

LANGAGE COURANT

Lecture de l'énoncé

Ce que je cherche :
- Les volumes d'or et de cuivre dans ce lingot.

Les masses d'or et de cuivre dans ce lingot.

Ce que je connais :
- Le volume du lingot : 0,8 dm³.
- La masse du lingot : 13,5 kg.
- La masse volumique de l'or : 19,5 kg/dm³
- La masse volumique du cuivre : 9 kg/dm³

LANGAGE MATHÉMATIQUE

Traduction mathématique

Choix des inconnues :
- Je désigne par x le volume de l'or dans le lingot.
- Je désigne par y le volume du cuivre dans le lingot.

Mise en équation :
- Le volume du lingot est égal à : volume d'or + volume de cuivre.

– $x + y = 0,8$
- La masse du lingot est égale à : masse d'or + masse de cuivre.

$19,5x + 9y = 13,5$

On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 0,8 & (1) \\ 19,5x + 9y = 13,5 & (2) \end{cases}$$

Recherche des solutions du système

Dans (1), on exprime x en fonction de y :
$x = 0,8 - y$

Dans (2), on remplace x par son expression en fonction de y.
$19,5\,(0,8 - y) + 9y = 13,5$
d'où : $y = 0,2$
$x = 0,6$

(0,6 ; 0,2) est la solution du **système**.

Vérifications et solution du problème

Volume du lingot, (en dm³).
$0,6 + 0,2 = 0,8$

Masse de l'or (en kg).
$0,6 \times 19,5 = 11,7$

Masse du cuivre (en kg).
$0,2 \times 9 = 1,8$

Masse du lingot (en kg).
$11,7 + 1,8 = 13,5$

Dans le lingot il y a :
- **0,6 dm3 d'or et 0,2 dm³ de cuivre.**
- **11,7 kg d'or et 1,8 kg de cuivre.**

3.2 UTILISATION DE SYSTÈME D'INÉQUATIONS

Énoncé

Moussa veut constituer un petit élevage. Pour cela, il veut acheter plus de 8 poulets et canards, (plus d'une volaille de chaque sorte), mais sa dépense doit être inférieure à 18 000 F.

1) *Sachant qu'un poulet coûte 1 500 F et un canard coûte 2 250 F, quelles sont toutes les possibilités d'achat pour Moussa ?*

2) *Quel est le nombre minimal de poulets que Moussa peut acheter ?*

3) *Quelles sont les possibilités d'achat si Moussa veut acquérir plus de 3 canards ?*

Solution

LANGAGE COURANT

Lecture de l'énoncé

Ce que je cherche :

- Toutes les possibilités d'achat pour Moussa.
- Le nombre minimal de poulets que Moussa peut acheter.
- Les achats possibles si Moussa veut plus de 3 canards.

Ce que je connais :

- Le nombre de volatiles est supérieur à 8.
- La dépense est inférieure à 18 000 F.

LANGAGE MATHÉMATIQUE

Traduction mathématique

Choix de l' inconnue :

- Je désigne par x le nombre de poulets achetés. (x est un nombre entier naturel plus grand que 1).
- Je désigne par y le nombre de canards achetés. (y est un nombre entier naturel plus grand que 1).

Mise en équation :

- Le nombre de volailles est plus grand que 8 : $x + y > 8$
- Le prix d'achat des volailles est plus petit que 18 000 F.

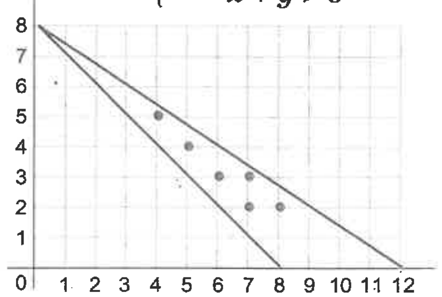
$1\,500x + 2\,250y < 18\,000$

On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y > 0{,}8 & (1) \\ 1\,500x + 2\,250y < 18\,000 & (2) \end{cases}$$

Résolution graphique

$$\begin{cases} 2x + 3y < 24 \\ x + y > 8 \end{cases}$$



Vérifie qu'il y a six couples de nombres entiers naturels plus grands que 1 solution du système :
(4 ; 5), (5 ; 4), (6 ; 3), (7 ; 3), (7 ; 2), (8 ; 2).

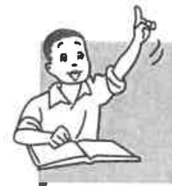
Vérifications et solution du problème

- Moussa peut acheter, au choix :

4 poulets et 5 canards (9 volailles ; 17 250 F)
5 poulets et 4 canards (9 volailles ; 16 500 F)
6 poulets et 3 canards (9 volailles ; 15 750 F)
7 poulets et 3 canards (10 volailles ; 15 000 F)
7 poulets et 2 canards (9 volailles ; 17 250 F)
8 poulets et 2 canards (10 volailles ; 16 500 F)

- Moussa doit acheter un minimum de 4 poulets.
- Moussa a deux possibilités pour acheter plus de 3 canards :

4 canards et cinq poulets, ou 5 canards et 4 poulets.



EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU 1^er DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1 Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations suivants :

(1) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ -2x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$

2 Résous chacun des systèmes d'équations suivants par la méthode de substitution :

(1) $\begin{cases} -x - 2y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = 3y - 7 \\ 0 = -4x + 3y + 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 5x + 4y - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$

3 Résous chacun des systèmes d'équations suivants par la méthode de combinaison :

(1) $\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ -x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - 7y + 8 = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ -7x + 8y + 3 = 0 \end{cases}$

4 Résous chacun des systèmes d'équations suivants :

(1) $\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y = -5x + 7 \\ x = 3y - 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ -7x + 8y - 1 = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -x + 7y - 4 = 0 \\ 3x - 21y + 10 = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y = 7x - 3 \\ y = -5x + 1 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} -7x - 5y + 4 = 0 \\ 7x + 5y = -2 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ -6x + 8y - 2 = 0 \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x - 5y + 7 = 0 \\ -2x + 10y = 0 \end{cases}$

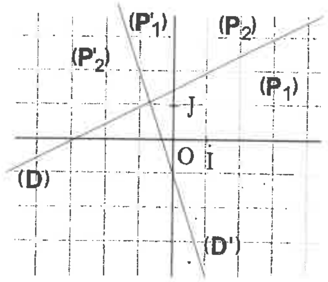
5 Le plan est muni d'un repère.
(D_1) est la droite d'équation : $2x - 5y + 3 = 0$.
(D_2) est la droite d'équation : $-x - y + 7 = 0$.
(D_3) est la droite d'équation : $y = \frac{1}{3}x - 1$.
Calcule le couple de coordonnées de A, B et C, points d'intersection respectifs de (D_1) et (D_2), (D_2) et (D_3), (D_3) et (D_1).

2 INÉQUATIONS DU 1^er DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

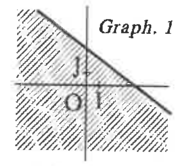
6 On donne l'inéquation (I) $7x - 8y - 11 > 0$.
1) Trouve deux couples solutions de (I) dont la première composante est -1.
2) Trouve deux couples solutions de (I) dont la deuxième composante est 3.

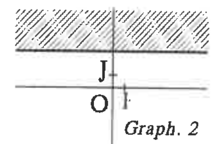
7 On donne l'inéquation (I) $5x - 13y < -7$.
Parmi les couples suivants, trouve ceux qui sont solutions de (I) :
$(0;2)$; $(-3;4)$; $(1;-1)$; $(\frac{2}{5};0)$; $(\frac{1}{2};\frac{3}{4})$.

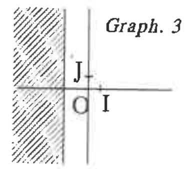
8 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) et (D') ont respectivement pour équation $x - 2y + 3 = 0$ et $3x + y + 1 = 0$.
Caractérise par une inéquation :
– les demi-plans (P_1) et (P_2) de frontière (D) ;
– les demi-plans (P'_1) et (P'_2) de frontière (D').

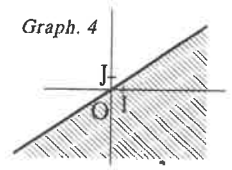


9 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les quatre inéquations suivantes :
(I_1) $2x - 3y > 0$; (I_2) $3x + 4y - 12 < 0$;
(I_3) $y > 3$; (I_4) $2x + 4 < 0$.
Associe chacune de ces inéquations à l'un des demi-plans hachurés de l'un des graphiques.





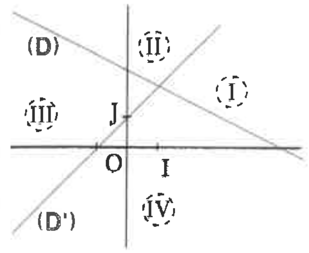




10 Représente graphiquement les solutions de chacune des inéquations suivantes :
(1) $-x + 4y - 5 > 0$; (2) $3x - 5y + 4 > 0$;
(3) $y > 2x - 7$; (4) $3x + 7y < 0$;
(5) $x - 3 > 0$; (6) $2y + 6 < 0$.

EXERCICES

11 Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) est la droite d'équation : $-x - 2y + 5 = 0$.
(D') est la droite d'équation : $x - y + 1 = 0$.
Les droites (D) et (D') partagent le plan en quatre parties (I), (II), (III) et (IV).



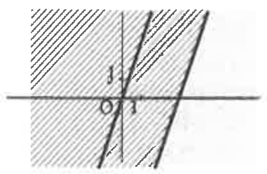
Associe à chacune de ces quatre parties un système de deux inéquations.

12 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les quatre systèmes d'inéquations suivants :

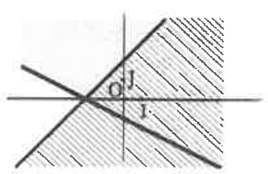
(1) $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + 2y + 2 > 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y < 0 \\ y - 3 < 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x - y > 0 \\ 3x - y - 9 < 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y + 2 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$

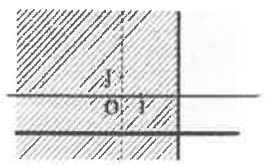
Associe chacun de ces systèmes d'inéquations à l'une des parties du plan deux fois hachurées de l'un des quatre graphiques ci-dessous.



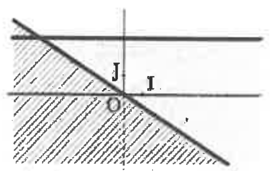
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4

13 Représente graphiquement les solutions de chacun des systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} 3x + y - 5 < 0 \\ -3x - 5y + 15 > 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x > 3 \\ x + y > 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + y - 1 < 0 \\ x - y + 3 < 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x - 3y + 2 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x > -3 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 2x + 3y - 9 < 0 \\ 2x + 3y + 9 > 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 3x - 4y - 24 > 0 \\ 3x - 4y + 16 < 0 \end{cases}$ (8) $\begin{cases} y - 4 < 0 \\ 3y + 6 > 0 \end{cases}$

3 PROBLEMES DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

14 Kassi écrit à son ami Ramanantsoa. Après avoir fait peser sa lettre à la poste, on lui répond qu'il doit l'affranchir à 840 F, mais la postière ne peut lui proposer que des timbres à 60 F et à 100 F. Quelles sont les différentes possibilités que peut choisir Kassi pour timbrer sa lettre ?

15 Des livres sont empilés les uns sur les autres et la hauteur de la pile est de 41 cm. Certains ont une épaisseur de 5 cm et les autres une épaisseur de 3 cm. Trouve le nombre possible de livres de chaque épaisseur.

16 Trouve deux nombres entiers naturels dont la somme est égale à 619 et la différence à 73.

17 Trouve deux nombres entiers naturels différents de 0 dont le quotient est égal à 7 et la différence à 72.

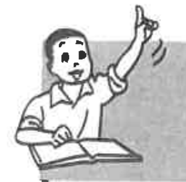
18 A la librairie « trottoir », Oyono a vendu 23 livres, les uns à 1 500 F, les autres à 2 800 F pour une recette totale de 46 200 F.
Quel est le nombre de livres de chaque prix vendu par Oyono ?

19 Yao a trois fois plus d'argent que son petit frère Djeni. Une de leurs tantes offre 3 000 F à chacun. Yao a alors deux fois plus d'argent que Djeni.
Combien les deux enfants avaient-ils d'argent avant de recevoir le cadeau de leur tante ?

20 Trouve les nombres réels a et b tels que les couples $(-1;3)$ et $(2;-5)$ soient solutions de l'équation $ax + by - 1 = 0$.

21 Les petites économies d'Amina sont constituées de pièces de 5 F et de 10 F ce qui représente 26 pièces au total pour un montant de 165 F.
Quel est le nombre de pièces de 5 F et le nombre de pièces de 10 F ?

22 La somme de deux nombres entiers naturels est 304. Si on divise le plus grand par le plus petit, le quotient est égal à 6 et le reste à 17.
Trouve ces deux nombres.



EXERCICES

23 Avant de partir au marché, Clémence possède 1 200 F de plus que sa camarade Solange. Au marché, elles dépensent chacune 3 600 F, Clémence possède alors deux fois plus d'argent que Solange.
De quelles sommes d'argent disposaient-elles avant d'aller au marché ?

24 ABCD est un rectangle.
Si on augmente sa largeur de 10 m et si on diminue sa longueur de 10 m, alors son aire ne change pas. Par contre, si on augmente sa largeur de 10 m et si on augmente sa longueur de 10 m, alors son aire augmente de 800 m².
Quelles sont les longueurs des côtés du rectangle ABCD ?

25 Trouve deux nombres entiers naturels différents de 0 dont la somme est plus petite que 9 et la différence plus grande que 4.
À l'aide d'un graphique, donne toutes les solutions possibles.

APPROFONDISSEMENT

26 Résous chacun des systèmes d'équations suivants :

(1) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \frac{-1}{3}x + \frac{3}{4}y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}y - 1 = 0 \\ \frac{5}{2}x + \frac{7}{5}y + 4 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{3x}{4} + y = \frac{1}{3}x + 3 \\ \frac{-7}{2}x - \frac{y}{4} + 4 = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y = -1 \\ 3x - 3y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x\sqrt{3} - 2y\sqrt{2} = 0 \\ -x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = -5 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x\sqrt{3} - y = -2 \\ x + y\sqrt{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{2}{3}y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y\sqrt{2} = \frac{-3}{4} \end{cases}$ (8) $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + y\sqrt{5} = \sqrt{7} \\ x - y\sqrt{2} = -\sqrt{3} \end{cases}$

27 Un matin, avant de partir à l'école, Salimata partage 26 beignets entre ses quatre enfants.
Ils en mangent tous plusieurs et lorsqu'ils rentrent à la maison, elle constate qu'il en reste le même nombre à chacun d'entre eux. Sachant que l'aîné en a mangé autant que le troisième, que le deuxième a mangé la moitié de sa part initiale et que le petit dernier, très gourmand, en a mangé autant que les trois autres réunis, trouve comment Salimata a fait son partage le matin.

28 Trente collégiens, garçons et filles, participent à une soirée dansante. Aminata a dansé avec 7 garçons, Bintou avec 8, Fatou avec 9, et ainsi de suite jusqu'à la dernière invitée, Fatimata, qui a dansé avec tous les garçons présents à la soirée.
Combien y avait-il de garçons et de filles à cette soirée ?

29 Un professeur de Mathématiques a posé deux questions aux élèves d'une classe de Troisième :
1) Pouvez-vous trouver des nombres entiers naturels de deux chiffres répondant aux deux conditions suivantes :
– le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines augmenté de 3 ;
– on obtient 27, lorsqu'on retranche le nombre cherché du nombre formé des mêmes chiffres écrits dans l'ordre inverse.
2) Répondez à la même question en remplaçant la 1re condition par : « le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines augmenté de 4 ».
Quelles réponses peux-tu apporter à ces deux questions ?

30 Kamga et Fotso possèdent chacun une petite parcelle de terrain pour cultiver quelques légumes.
Ces deux parcelles ont la même aire. Kamga a une parcelle de forme rectangulaire dont les dimensions sont des nombres entiers de mètres telles que la largeur mesure plus de 7 m et la longueur dépasse la largeur de 10 m.
Fotso, lui, a une parcelle en forme de trapèze rectangle dont la grande base et la hauteur ont la même longueur et mesurent le double de la largeur de la parcelle de son voisin Kamga. La petite base du trapèze est un nombre entier de mètres et elle mesure plus d'un mètre.
Calcule l'aire de ces parcelles.

31 Le club « Unesco » d'un lycée équipe tous ses membres d'une même tenue pour effectuer sa sortie annuelle.
Une tenue de garçon coûte 5 000 F et une tenue de fille 6 000 F. La dépense du club a été plus petite que 450 000 F et dans ce club il y a plus de filles que de garçons.
1) Représente graphiquement l'ensemble des solutions indiquant le nombre possible de garçons et de filles susceptibles d'être membre de ce club.

2) Par simple lecture graphique, réponds aux questions suivantes :
- Ce club peut-il être composé de 30 garçons et de 40 filles ? De 45 garçons et 52 filles ?
- Quel est le nombre maximal de garçons membres ce club ? Quel est dans ce cas le nombre de filles ?

32 Komo, dont les résultats ont été insuffisants durant l'année scolaire, doit se présenter en fin d'année à un examen de passage pour s'inscrire dans une classe de 2de Scientifique.
Le passage en Seconde est conditionné par l'obtention d'une moyenne plus grande que 12 pour l'ensemble des trois matières scientifiques, Mathématiques, Sciences Physiques et Biologie dont les coefficients sont respectivement 5; 3 et 3.
Il connaît son niveau en Biologie et se donne modestement 06/20. Il sait d'autre part qu'il aura moins de 15/20 en Sciences Physiques et moins de 17/20 en Mathématiques.
Quelles sont les notes que Komo doit absolument obtenir dans ces deux matières pour réussir son examen sachant que les correcteurs donnent toujours des notes entières ?

33 Djenabou demande à sa fille Aïssatou d'aller au marché lui acheter du pain, des mangues et des ananas. Elle lui donne un billet de 2 500 F et lui dit : « Tu dépenseras plus de 1 200 F pour l'achat des fruits, mais tu garderas 400 F pour le boulanger. D'autre part, je veux que tu me ramènes plus de 5 mangues et plus de 6 ananas ».
Combien Aïssatou peut-elle acheter de mangues à 100 F et d'ananas à 150 F ?

34 Lors du conseil des anciens de son village, Moussa a entendu la conversation suivante entre le doyen du conseil et le benjamin :
« J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez actuellement. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons ensemble 180 ans ».
Moussa voudrait bien trouver l'âge de ces deux vénérables personnages, mais étant à la fois fâché avec la conjugaison et les mathématiques, il reste totalement impuissant devant ce problème.
Aide-le à trouver l'âge des deux personnages.

35 Une dure condition
Un cheval et un âne, portant chacun une lourde charge constituée de sacs de même masse, allaient côte à côte et parlaient de la dure condition qui leur était faite. Le cheval se plaignait du poids excessif de son fardeau.
« De quoi te plains-tu ? lui dit l'âne. Si je prends un sac de ton fardeau, ma charge sera deux fois plus lourde que la tienne, alors que si tu prends un sac de mon dos, ton fardeau sera égal au mien ».
Calcule le nombre de sacs que portaient respectivement le cheval et l'âne.

36 Trouve deux nombres entiers naturels dont la somme est 105 et la différence de leurs carrés 1 995.

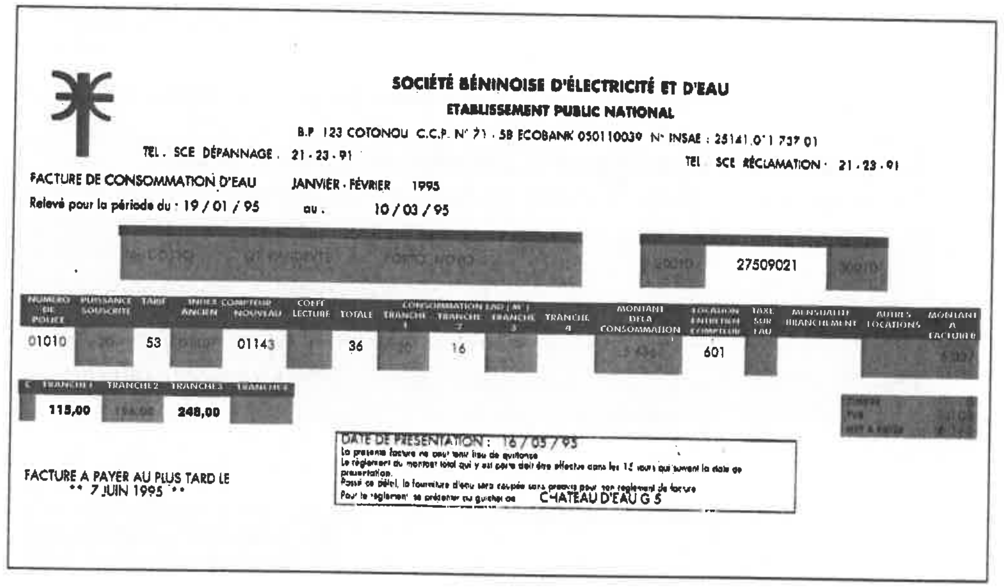
RECHERCHE

37 Les bœufs de Newton
Sachant que 75 bœufs mangent en 12 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 60 ares, que 81 bœufs mangent en 15 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 72 ares, quel est le nombre de bœufs qui mangent en 18 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 96 ares ?
On suppose que l'herbe pousse régulièrement et que chaque bœuf mange 8 kg d'herbe par jour.
(Tu pourras désigner par x la quantité d'herbe par are qu'il y a initialement dans un pré, par y la quantité d'herbe par are qui pousse en un jour dans un pré et par n le nombre de bœufs dans le pré de 96 ares.)

38 En descendant le fleuve
Pour aller de son village situé au bord du fleuve à la ville située en aval en descendant le fleuve dans le sens du courant, Faye le pêcheur a mis 30 mn sans s'arrêter et en pagayant régulièrement. Au retour, il met 1 h 20 min pour parcourir le trajet inverse en remontant le courant toujours sans s'arrêter et en pagayant régulièrement comme à l'aller.
Combien de temps mettrait Faye pour se rendre de son village à la ville sans s'arrêter et en se laissant aller à la vitesse du courant sans pagayer ?
(Tu supposeras d'une part, que la vitesse du pêcheur lorsqu'il pagaie et la vitesse du courant sont constantes. Tu supposeras d'autre part, que la distance parcourue dans les deux sens est la même).

15 Applications affines

Une facture d'eau


SOCIÉTÉ BÉNINOISE D'ÉLECTRICITÉ ET D'EAU
ETABLISSEMENT PUBLIC NATIONAL
B.P 123 COTONOU C.C.P. N° 71 - 58 ECOBANK 050110039 N° INSAE : 25141.0°1 737 01
TEL. SCE DÉPANNAGE . 21 - 23 - 91
TEL SCE RÉCLAMATION · 21 - 23 - 91
FACTURE DE CONSOMMATION D'EAU JANVIER - FÉVRIER 1995
Relevé pour la période du : 19 / 01 / 95 au . 10 / 03 / 95

27509021

NUMERO DE POLICE	PUISSANCE SOUSCRITE	TARIF	INDEX COMPTEUR ANCIEN	INDEX COMPTEUR NOUVEAU	COEFF LECTURE	TOTALE	TRANCHE 1	TRANCHE 2	TRANCHE 3	TRANCHE 4	MONTANT DE LA CONSOMMATION	LOCATION ENTRETIEN COMPTEUR	TAXE SUR EAU	MENSUALITE BRANCHEMENT	AUTRES LOCATIONS	MONTANT A FACTURER
01010		53		01143		36		16				601				

TRANCHE1	TRANCHE2	TRANCHE3	TRANCHE4
115,00		248,00	

DATE DE PRESENTATION : 16 / 03 / 95
La présente facture ne peut tenir lieu de quittance
Le règlement du montant total qui y est porté doit être effectué dans les 15 jours qui suivent la date de présentation.
Passé ce délai, la fourniture d'eau sera coupée sans préavis pour non règlement de facture
Pour le règlement se présenter au guichet de CHATEAU D'EAU G 5

FACTURE A PAYER AU PLUS TARD LE
** 7 JUIN 1995 **

La correspondance qui au nombre de m^3 d'eau consommée associe le montant de la consommation hors taxe est une application.
Comment est calculé ce montant ?

SOMMAIRE

1 Applications affines

1.1 NOTION D'APPLICATION AFFINE

Activité

À l'occasion des fêtes de fin d'année, la coopérative scolaire du collège d'enseignement général de KETOU loue un amplificateur et des haut-parleurs pour la sonorisation de la salle d'exposition. Elle doit payer 800 F pour toute journée commencée, et elle a dû verser un forfait de 12 000 F.

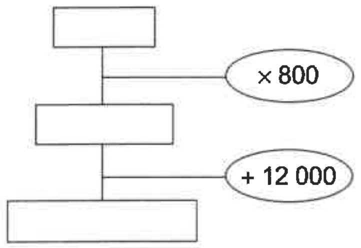
• Complète le tableau suivant :

Nombre de journées	2	3	5	6	8	10	15	n
Somme totale payée								$800n + 12\ 000$

• Quelle serait la somme à payer pour deux jours de location ? Pour huit jours ? Pour quinze jours ?
La somme totale à payer pour n journées est : $800n + 12\ 000$.
On a exprimé la somme à payer en fonction du nombre de jours de location.

Présentation

Dans l'activité précédente, pour calculer la somme à payer, on peut utiliser le programme de calcul illustré ci-dessous.



On peut faire fonctionner ce programme avec un nombre réel x.
On obtient le nombre réel $800x + 12\ 000$.

Ainsi, à chaque nombre réel x on peut faire correspondre un nombre réel et un seul :
$800x + 12\ 000$.
On a défini **une application de ℝ dans ℝ**. Désignons par f cette application.

On note : $800x + 12\ 000 = f(x)$.
On dit que $(800x + 12\ 000)$ est **l'image** de x par l'application f.

$f(x)$ est de la forme : $ax + b$.
On dit que f est une **application affine.**

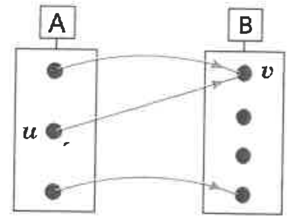
Par ailleurs, à chaque nombre réel y on peut faire correspondre un nombre réel x et un seul tel que : $y = 800x + 12\ 000$.
On dit que l'**application** f est **bijective** ou encore que f est **une bijection** *de* **ℝ dans ℝ**.

DÉFINITION

A et B sont des ensembles.

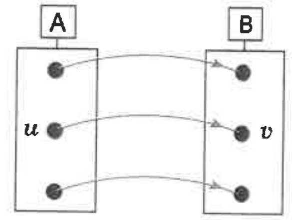
On appelle *application de* l'ensemble A *dans* l'ensemble B, toute correspondance qui, à chaque élément de A, associe un élément et un seul de B.

Lorsqu'une application f de A dans B, associe à l'élément u l'élément v,
on note : $v = f(u)$.
On dit que v est l'image de u par f.



$v = f(u)$
u a pour image v par f
v est l'image de u par f

On appelle *bijection de* l'ensemble A *dans* l'ensemble B, toute application f de l'ensemble A dans l'ensemble B telle que chaque élément de B est l'image par f d'un élément de A et d'un seul.



DÉFINITION

a et b sont des nombres réels.

On appelle *application affine de coefficient a et de terme constant b* la correspondance qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$

On dit que l'application affine f est définie par : $f(x) = ax + b$

Exemples
f, g et h sont les applications affines définies par : $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = 8x$; $h(x) = -7$
$f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 2$ et $b = -1$
$g(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 8$ et $b = 0$
$h(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 0$ et $b = -7$.
Calculons l'image de 5 par f, g et h : $f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$; $g(5) = 8 \times 5 + 0 = 40$; $h(5) = -7$.

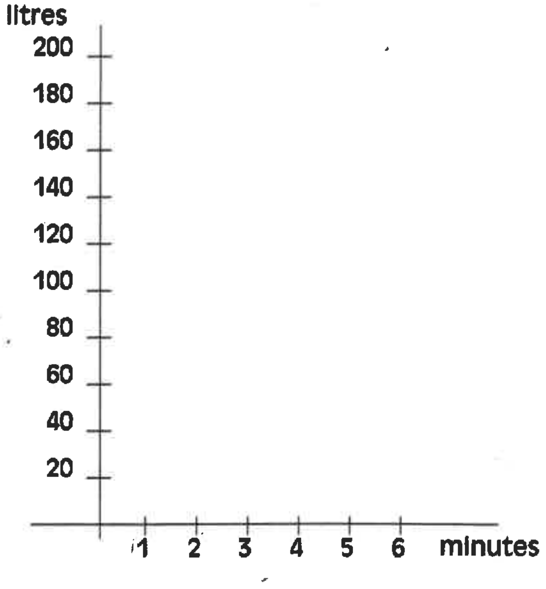
Remarque
Lorsque le coefficient d'une application affine est différent de 0, cette application affine est une bijection de ℝ dans ℝ.

EXERCICE

1.a Calcule $f(-2)$; $f(0)$; $f(-\sqrt{2})$, f étant l'application affine définie par :
$f(x) = -x\sqrt{2} + 0{,}5$.

1.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Activité 1



Un réservoir contient 200 litres d'eau. Aliou ouvre le robinet et laisse couler l'eau régulièrement avec un débit de 30 litres par minute.

• Complète le tableau suivant.

Durée d'écoulement (en min)	1	2	3	4	5	6
Quantité d'eau restant dans le réservoir (en l)	170	140				

Pour calculer la quantité d'eau dans le réservoir on peut utiliser l'application affine f définie par :

$$f(x) = -30x + 200$$

Le plan est muni d'un repère.

• Place les points représentant les colonnes du tableau et vérifie que ces points sont alignés.

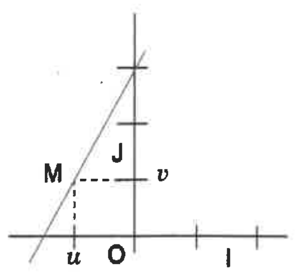
Ils ont pour couple de coordonnées $(x\,;f(x))$.

L'ensemble de ces points est la **représentation graphique** de ce tableau de correspondance.

DÉFINITION

Le plan est muni d'un repère. A et B sont des ensemble de nombres réels.
***f* est une application de A dans B.**
On appelle *représentation graphique* de l'application *f*, l'ensemble des points du plan de couple de coordonnées $(x\,;f(x))$, x étant un élément de A.

Activité 2



Le plan est muni du repère (O, I, J).
f est l'application affine définie par : $f(x) = 2x + 3$
(D) est la droite d'équation : $y = 2x + 3$
M est un point de coordonnées $(u\,;v)$.

On sait que : M $\in$ (D) *équivaut à* $v = 2u + 3$.

On peut justifier que la droite (D) est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;f(x))$, c'est **la représentation graphique** de l'application affine f.

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

Le plan est muni du repère (O, I, J). a et b sont des nombres réels donnés.
***f* est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.**
Elle a pour *représentation graphique* la droite d'équation : $y = ax + b$.

EXERCICES

1.b Trace la représentation graphique des applications f et g définies par :
$f(x) = -2x - 0{,}5$; $g(x) = -3$.

1.c Représente graphiquement la fonction affine f telle que : $f(-1) = 4$ et $f(3) = 2$.
Quelle est l'image de 2 ? Quel est le nombre qui a pour image 3 ?

1.3 SENS DE VARIATION

Activité 1

• Représente graphiquement l'application affine f telle que : $f(3) = 7$ et $f(5) = 2$.
• Utilise ce graphique pour comparer $f(-1)$ et $f(2)$.

Activité 2

a et b sont deux nombres réels, f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.
u et v, étant deux nombres réels on veut comparer $f(u)$ et $f(v)$.
• Justifie chaque étape des raisonnements suivants.

a est un nombre réel positif.

Supposons $u < v$
on a $au < av$
$au + b < av + b$
$f(u) < f(v)$

Donc : deux nombres réels et leurs images sont rangés dans le même ordre.

On dit que l'application affine f est **croissante.**

a est un nombre réel négatif.

Supposons $u < v$
on a $au > av$
$au + b > av + b$
$f(u) > f(v)$

Donc : deux nombres réels et leurs images sont rangés dans des ordres contraires.

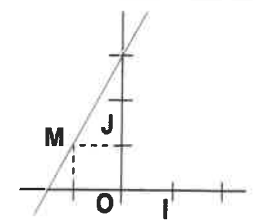
On dit que l'application affine f est **décroissante.**

On dit que f est **constante** lorsque a est nul. Quels que soient les nombres réels u et v, on a alors : $f(u) = f(v) = b$.

PROPRIÉTÉ

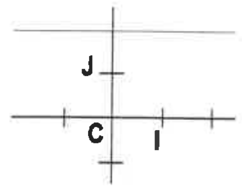
***f* est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.**

• ***f* est croissante lorsque $a > 0$**



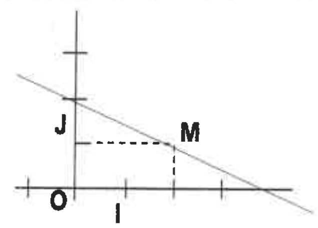
$f(x) = 2x + 3$

• ***f* est constante lorsque $a = 0$**



$f(x) = 2$

• ***f* est décroissante lorsque $a < 0$**



$f(x) = -0{,}5x + 2$

EXERCICES

1.d f et g sont deux applications affines définies par $f(x) = x(\sqrt{2} - 1)$ et $g(x) = 2 - 1\,995x$.
Précise si f et g sont croissantes ou décroissantes.

1.e f est l'application affine telle que : $f(-3) = 2$ et $f(1) = 5$.
f est-elle croissante ou décroissante ? Compare $f(0)$ et $f(3)$.

1.f f est l'application affine définie par : $f(x) = -572{,}98x + 76{,}04$.
Compare $f(29\,708)$ et $f(1\,526)$.

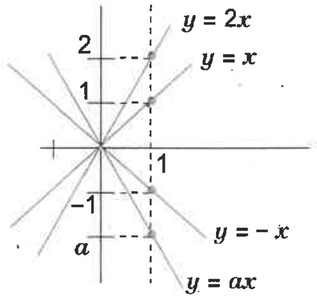
2 Applications linéaires

2.1 DÉFINITION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

DÉFINITION

On appelle *application linéaire*, une application affine définie par : $f(x) = ax$, a étant un nombre réel.

Remarque
L'application linéaire définie par $f(x) = ax$ étant une application affine, sa représentation graphique est donc la droite d'équation $y = ax$.
Cette droite passe par l'origine du repère.
L'ordonnée du point d'abscisse 1 de cette droite est le coefficient a.



EXERCICES

2.a f est l'application linéaire définie par : $f(x) = -1{,}5x$. Calcule $f(10)$; $f(1)$; $f(-5)$ et $f(0)$.
Calcule les nombres qui ont respectivement pour image : 1,5 ; 1 ; $25\sqrt{5}$ et 0.

2.b f, g et h sont les applications linéaires telles que : $f(-9) = 6$; $g(1) = \sqrt{3}$; $h(0{,}25) = 1$.
Détermine leurs coefficients.

2.2 TABLEAU DE PROPORTIONNALITÉ ET APPLICATION LINÉAIRE

Activité

L'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse de l'objet suspendu à ce ressort. Les nombres du tableau ci-dessous sont les résultats d'une expérience menée en classe.

Masse de l'objet (en g)	50	75	125	200	300	500	x	
Allongement du ressort (en cm)	0,6	0,9	1,5	2,4	3,6	6		y

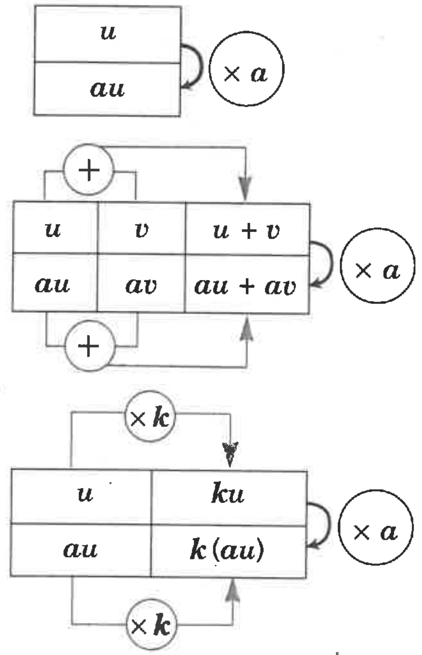
- Quel serait l'allongement du ressort correspondant à une masse de 275 g ? de x g?
- Quelle est la masse qui provoquerait un allongement de 4,5 cm ? de y cm ?

Une application linéaire f permet de calculer l'allongement du ressort en fonction de la masse suspendue à ce ressort.
- Quelle est cette application linéaire ?
- Quelle est l'image de (– 16) par l'application linéaire f?
- Quel est le nombre qui a pour image 9 par l'application linéaire f?

Une application linéaire g permet de calculer la masse suspendue au ressort en fonction de l'allongement provoqué par cette masse.
- Quelle est cette application linéaire ?
- Quelle est l'image de (– 7) par l'application linéaire g ?
- Quel est le nombre qui a pour image 1 000 par l'application linéaire g ?

Tableaux de proportionnalité et application linéaire

On peut traduire une situation et les propriétés de proportionnalité par :

un tableau de proportionnalité	une application linéaire f définie par
	$f(x) = ax$ $f(u + v) = f(u) + f(v)$ $f(ku) = kf(u)$

EXERCICES

2.e f est l'application linéaire telle que : $f(9) = 24{,}75$.
Sans déterminer le coefficient de f, calcule l'image par f de chacun des nombres suivants : 3 ; 6 ; 18 ; 15 ; – 3 ; 12 ; 7,5 ; 10,5 ; – 1,5 ; 90 ; 99.

2.f f est une application linéaire telle que : $f(3) - f(4) = \frac{7}{2}$.
Quelle est cette application linéaire ?

3 Résolution graphique de problèmes

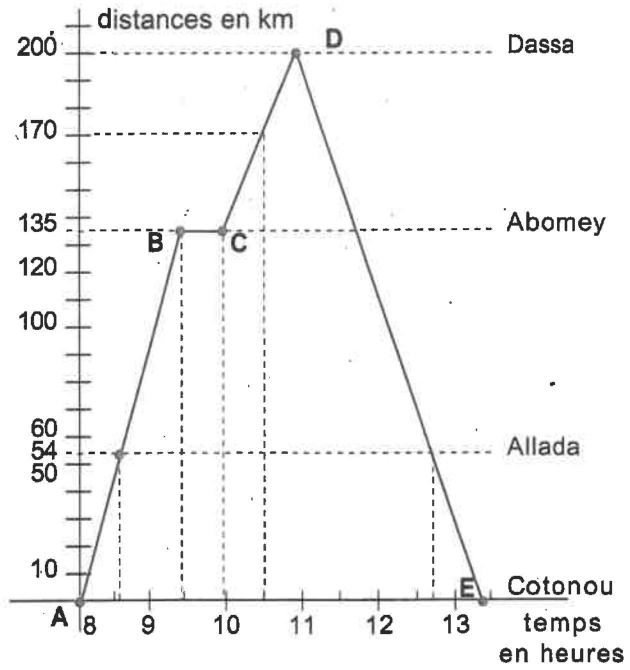
Exemple 1 : une course en taxi

Un taxi fait le circuit Cotonou-Allada-Abomey-Dassa-Abomey-Allada-Cotonou. La ligne brisée ABCDE est la représentation graphique de l'application f qui exprime en fonction du temps, la distance entre Cotonou et ce taxi.

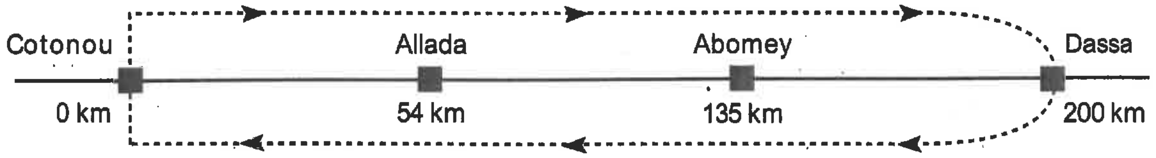
1) *À l'aide de ce graphique, décris le parcours du taxi sur le circuit. Calcule la vitesse à laquelle circule le taxi sur chacun des tronçons du trajet. (Les informations fournies par le graphique seront données en langage courant et en langage mathématique.)*

2) *Détermine graphiquement, puis vérifie par le calcul, à quelle distance de Cotonou se trouvait le taxi à 10 h 30.*

3) *Détermine graphiquement les heures de passage du taxi à Allada.*



Circuit : Cotonou - Allada - Abomey - Dassa - Abomey - Allada - Cotonou



Langage courant

1) • *De 8 h à 9 h 30*

Heure de départ de Cotonou : 8 h
Heure d'arrivée à Abomey : 9 h 30
Vitesse entre 8 h et 9 h 30 :

$$\frac{135}{1,5}\text{ km/h} = 90\text{ km/h}.$$

• *De 9 h 30 à 10 h*
Arrêt à Abomey.

• *De 10 h à 11 h*
Vitesse entre 10 h et 11 h : 65 km/h.

• *De 11 h à 13 h 30*
Vitesse entre 11 h et 13 h 30 : 80 km/h.

2) • *A 10 h 30*

Langage mathématique

• *Dans [8 ; 9,5]* (9 h 30 = 9,5 h)

$f(8) = 0$; A (8 ; 0)
$f(9,5) = 135$; B (9,5 ; 135)
Coefficient directeur de la droite (AB) :

$$\frac{135-0}{9,5-8} = 90$$

• *Dans [9,5 ; 10]*
pour $x \in [9,5 ; 10]$, $f(x) = 135$

• *Dans [10 ; 11]*
Coefficient directeur de (CD) : 65.

• *Dans [11 ; 13,5]* (13 h 30 = 13,5 h)
Coefficient directeur de (DE) : (– 80).

• *Image de 10,5*
C'est le nombre y tel que :
$y = f(10,5)$.

Le taxi se trouvait à mi-chemin entre Abomey et Dassa donc à : $\frac{1}{2}$ (135 km + 200 km),
C'est à dire 167,5 km de Cotonou.

3) • *Heures de passage à Allada.*

1er passage : entre 8 h 30 et 9 h.
2e passage : entre 12 h 30 et 13 h.

Ordonnée du point d'abscisse 10,5 de (CD).

• *Nombres ayant pour image 54*
Ce sont les solutions de l'équation
$f(x) = 54$
Abscisse du point d'ordonnée 54 de (AB).
Abscisse du point d'ordonnée 54 de (DE).

Exemple 2 : une facture d'eau

Pour établir les factures afférentes à la consommation d'eau de ses abonnés, la S.B.E.E. (Société Béninoise d'Électricité et d'Eau) utilise le tarif suivant :

TRANCHES	Du 1er au 20e m³	Du 21e au 60e m³	Au delà du 61e m³
PRIX DU m³	115 F	196 F	248 F

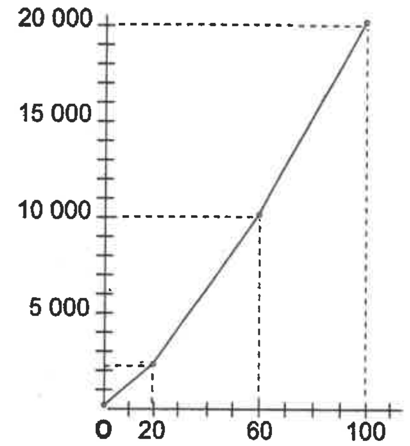
On désigne par g l'application qui, à la quantité x d'eau (en m³) consommée par un abonné à la SBEE, associe le prix g (x) à payer (hors taxes).

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on donne la représentation graphique de l'application g.

1) *Détermine g (x) selon que x appartienne à [0 ; 20], à]20 ; 60] ou à]60; →[.*

2) *La consommation d'un abonné est 95m³. Utilise le graphique pour estimer la somme à payer, (hors taxes). Calcule la somme exacte.*

3) *Une consommation d'eau correspond à une facturation hors taxes de 5 362 F. Utilise le graphique pour estimer la quantité d'eau facturée. Calcule la quantité exacte.*



Solutions

1) $x \in [0 ; 20]$

• Toute la consommation est facturée en 1re tranche ;

$$g(x) = 115x$$

Pour $x \in [0 ; 20]$
$g(x) = 115x$

$x \in]20 ; 60]$

• 20 m³ sont facturés en 1re tranche
$(x - 20)$ m³ en 2e tranche ;

$$g(x) = \underbrace{115\times 20}_{1^{re}\text{ T.}} + \underbrace{(x-20)\times 196}_{2^{e}\text{ T.}}$$

Pour $x \in]20 ; 60]$
$g(x) = 196x - 1\,620$

$x \in]60; \to[$

• 20 m³ sont facturés en 1re tranche
• 40 m³ en 2e tranche
• $(x - 60)$ m³ en troisième tranche ;

$$g(x) = \underbrace{115\times 20}_{1^{re}\text{ T.}} + \underbrace{196\times 40}_{2^{e}\text{ T.}} + \underbrace{(x-60)\times 248}_{3^{e}\text{ T.}}$$

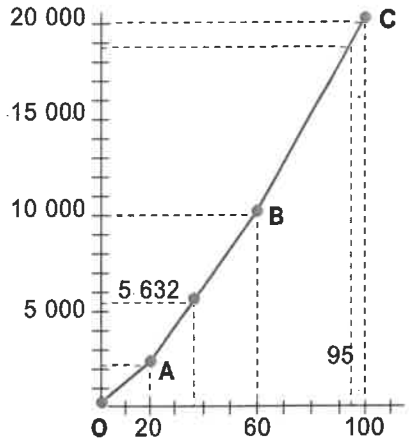
Pour $x \in]60; \to[$
$g(x) = 248x - 4\,740$

2) Pour une consommation de 95 m^3,
- la lecture du graphique permet d'écrire :
$18\,000 < g\,(95) < 19\,000$
- le calcul permet d'obtenir : (puisque $95 \in\,]60; \to[$)
$g\,(95) = 248 \times 95 - 4\,740 = 18\,820$

La somme à payer est de 18 820 F.

3) Une consommation de x m^3 est facturée 5 632 F.
- La lecture du graphique permet d'écrire : $30 < x < 40$
- Le calcul permet d'obtenir : (puisque $x \in\,]20; 60]$)
$5\,632 = g\,(x)$
$5\,632 = 196x - 1\,620$
$x = 37$

La consommation est de 37 m^3.



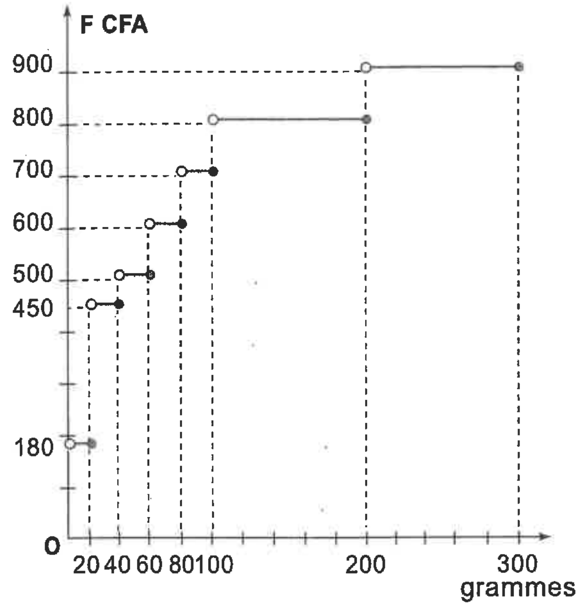
Exemple 3 : un tarif postal

Voici un extrait[1] du tarif postal en vigueur au 13 Avril 1995.

Masses, jusqu'à	Tarifs ordinaires
20 g	180 F CFA
40 g	450 F CFA
60 g	500 F CFA
80 g	600 F CFA
100 g	700 F CFA
200 g	800 F CFA
300 g	900 F CFA

On a représenté ci-contre les données de ce tableau.

- Quels affranchissements seront-ils nécessaires pour expédier chacune des lettres dont voici les masses : 120 g ; 80 g ; 6 g ; 59 g ; 21 g ?
- Quelle est la masse maximale d'une lettre affranchie à 900 F ?



En langage mathématique, l'application f qui indique l'affranchissement d'une lettre en fonction de sa masse est telle que :
– un nombre réel négatif n'a pas d'image par f,
– l'image par f d'un nombre de l'intervalle $]0\,;\,20]$ est le nombre 180.
– l'image par f d'un nombre de l'intervalle $]20\,;\,40]$ est le nombre 450.
– ...
– Un nombre plus grand que 300 n'a pas d'image par f.

- Quelle est l'image par f de chacun des nombres suivants : 26 ; 63 ; 80 ; 104 ; 22 ; 299 ?
- Existe-t-il un nombre qui a pour image par f le nombre 550 ?
- Quels sont les nombres qui ont pour image par f le nombre 800 ?
- Quel est le plus grand des nombres dont l'image par f est 800 ?

1. Pour les lettres ou paquets ordinaires, la tarification est prévue jusqu'à une masse de 2 000 g.

EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 APPLICATIONS AFFINES

1 Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies ci-dessous, sont des applications affines. Pour chacune d'elles, précise le coefficient et le terme constant.
$f\,(x) = 3x + 2$; $g\,(x) = 5x$; $h\,(x) = x + 2$
$i\,(x) = x\sqrt{3} + 2$; $j\,(x) = -\frac{1}{2}x$; $k\,(x) = \frac{1 + 2x}{3}$
$l\,(x) = -8$; $m\,(x) = 3 - x$; $n\,(x) = x$

2 f est l'application affine définie par $f\,(x) = -2x + 5$.
1) Calcule : $f\,(5)$; $f\,(-3)$; $f\,(-\frac{1}{2})$; $f\,(\frac{3}{4})$.
2) Calcule les nombres réels a, b et c tels que :
$f\,(a) = 5$; $f\,(b) = -5$; $f\,(c) = -\frac{3}{4}$.

3 f est l'application affine telle que :
$f\,(-1) = 3$ et $f\,(2) = -2$.
1) Calcule le coefficient et le terme constant de cette application affine.
2) Complète le tableau suivant :

x	-3	0	$\frac{1}{2}$			
$f(x)$			$\frac{5}{4}$	0	-1	

4 L'unité de longueur est le cm.
1) ABCD est un rectangle de longueur x et de largeur 3.
f est l'application affine qui permet d'exprimer le périmètre de ce rectangle en fonction de x.
2) MNPQ est un rectangle de longueur x et de largeur 5. g est l'application affine qui permet d'exprimer l'aire de ce rectangle en fonction de x.
Pour chacune de ces applications affines, précise le coefficient et le terme constant.

5 Le plan est muni d'un repère.
Représente graphiquement les applications affines définies par :
$f\,(x) = -3x + 2$, $g\,(x) = \frac{1}{3}x$ et $h\,(x) = -3$.

6 Précise le sens de variation de chacune des applications affines définies par :
$f\,(x) = 2x + 3$; $g\,(x) = -5x$; $i\,(x) = 7$;
$h\,(x) = \frac{1}{3}x - 2$; $j\,(x) = (3 - 2\sqrt{2})x - 2$;
$k\,(x) = -\frac{1}{3}x + 1$; $l\,(x) = (1 - \sqrt{5})x + 3$.

7 a et b étant des nombres réels, f est l'application affine définie par : $f\,(x) = ax + b$.
Dans chacun des cas suivants, détermine :
1) b sachant que $a = -\sqrt{3}$ et $f\,(5) = 7$.
2) a sachant que $b = 1 + \sqrt{2}$ et $f\,(3) = -\sqrt{2}$.
3) a et b sachant que $f\,(3) = 1$ et $f\,(-\sqrt{5}) = 3$.

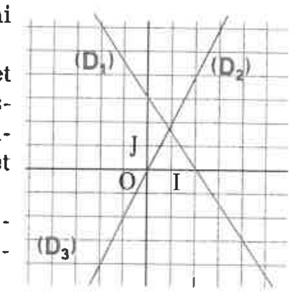
8 En utilisant une représentation graphique, dis s'il existe des applications affines f et g telles que :
1) $f\,(1) = 3$, $f\,(-2) = 2$ et $f\,(4) = -1$.
2) $g\,(1) = 3$, $g\,(-2) = 2$ et $g\,(4) = 4$.
Dans ce cas, calcule leur coefficient et leur terme constant.

9 f est une application affine telle que $f\,(1) = 3$.
Trouve les valeurs possibles de son coefficient et de son terme constant, sachant qu'ils sont des nombres entiers naturels.

10 f est une l'application affine définie par :
$f\,(x) = (2\sqrt{2} - 1)x + 1$.
1) f est-elle croissante ou décroissante ?
2) Range par ordre croissant, sans les calculer, les nombres
$f\,(\sqrt{2} - 1)$, $f\,(\frac{2}{3})$, $f\,(\frac{3}{5})$ et $f\,(\frac{2}{\sqrt{5}})$.

11 Le plan est muni d'un repère.
Dans chacun des cas suivants, détermine le coefficient et le terme constant de l'application affine f dont la représentation graphique est la droite (D) d'équation :
1) $x + y - 4 = 0$; **2)** $2x - y + 7 = 0$;
3) $-2y - x = 0$; **4)** $2y + 3 = 0$.

12 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Les droites (D_1), (D_2) et (D_3) représentent respectivement les applications affines f_1, f_2 et f_3.
Quels sont le coefficient et le terme constant de f_1, f_2 et f_3 ?



13 Représente graphiquement les applications affines f, g et h suivantes :
1) f est définie par : $f\,(x) = 20x - 90$.
2) g est définie par : $g\,(x) = 800x - 12\,000$.
3) h est définie par : $h\,(x) = -\frac{x}{100} + 0{,}5$.

EXERCICES

(Tu choisiras convenablement les unités sur chacun des axes de chaque repère utilisé.)

14 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1) Trouve l'application affine f dont la représentation graphique est la droite (D) passant par les points A(– 1;2) et B($\sqrt{3}$;0).
2) f est-elle croissante ou décroissante ?

2 APPLICATIONS LINÉAIRES

15 Parmi les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, trouve les trois applications linéaires :
$f(x) = 3x + 2$; $g(x) = 5x$; $h(x) = x + 2$;
$i(x) = x\sqrt{3} + 2$; $j(x) = -\frac{1}{2}x$ $k(x) = \frac{1 + 2x}{3}$
$l(x) = -8$; $m(x) = 3 - x$; $n(x) = x$.

16 Dans les deux tableaux de correspondance suivants, on a indiqué le prix à payer pour l'achat d'un même article dans deux magasins A et B.

Magasin A

Nombre d'articles	2	3	4	5	6
Prix à payer en F	1 250	1 875	2 500	2 925	3 750

Magasin B

Nombre d'articles	2	3	4	5	6
Prix à payer en F	1 120	1 680	2 240	2 800	3 360

Ces deux tableaux sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, précise l'application linéaire qui traduit chacun de ces tableaux.

17 Complète chacune des cases du tableau ci-dessous par OUI ou par NON.

L'application définie par :	est affine	est linéaire
$f(x) = 5x - 3$		
$g(x) = -3x + 5$		
$h(x) = 1\,997x$		
$i(x) = 3(x\sqrt{2} - 4)$		
$j(x) = (1 - \sqrt{3})x$		
$k(x) = -7$		
$l(x) = 0$		

18 f est une application linéaire. Complète le tableau ci-dessous.

x	-2		$1 + \sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$1 - \sqrt{2}$
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$			

19 f est l'application linéaire définie par :
$f(x) = -\frac{7}{5}x$.
1) Calcule : $f(5)$; $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$; $f(\frac{5}{7})$.
2) Calcule les nombres réels a, b et c tels que :
$f(a) = 0$; $f(b) = -1$; $f(c) = -\frac{4}{3}$.

20 f est l'application linéaire telle que :
$f(-3) = 2$.
Calcule le coefficient de cette application linéaire et complète le tableau suivant :

x	-2	$-\frac{1}{3}$	0			
$f(x)$				$-\frac{5}{4}$	-1	$\frac{3}{5}$

21 L'unité de longueur est le cm.
f est l'application linéaire qui permet d'exprimer l'aire d'un trapèze de hauteur x et de bases 3,5 et 5,5.
g est l'application linéaire qui permet d'exprimer la longueur d'une diagonale de ce cube en fonction de son arête x.
h est l'application linéaire qui permet d'exprimer le périmètre d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur x d'un côté du triangle.
Précise le coefficient de chacune de ces applications linéaires.

22 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Représente graphiquement les applications linéaires définies par :
$f(x) = -5x$; $g(x) = \frac{3}{4}x$; $h(x) = -\frac{5}{3}x$.

23 Précise le sens de variation de chacune des applications linéaires suivantes :
$f(x) = -7x$; $g(x) = \frac{1}{3}x$; $h(x) = x\sqrt{3}$;
$i(x) = -\frac{7}{4}x$; $j(x) = -x\sqrt{2}$; $k(x) = x$.

24 Complète le tableau ci-dessous en utilisant les propriétés de l'application linéaire f.

x	7	14	28		35	105	
$f(x)$		6		30			39

EXERCICES

25 Calcule le coefficient des applications linéaires f, g, h et i suivantes :
1) f est telle que : $f(2) + f(3) = -5$.
2) g est telle que : $2g(1) = 0{,}5$.
3) h est telle que : $h(2) - h(\frac{2}{3}) = \frac{3}{4}$.
4) i est telle que : $2i(-1) + \frac{1}{2}i(1) = \sqrt{2}$.

26

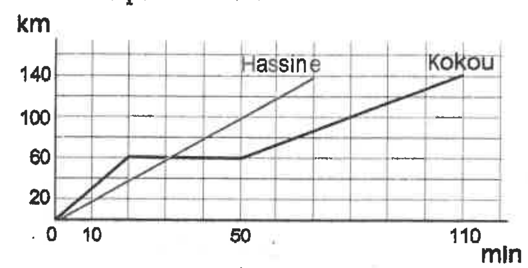
x	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	-3	$-\sqrt{6}$

f est une application linéaire. Sans calculer le coefficient de f, calcule les nombres suivants :
$f(1 + \sqrt{3})$; $f(\sqrt{6})$; $f(1 - \sqrt{6})$; $f(\frac{1}{1 - \sqrt{3}})$.

27 Le plan est muni d'un repère.
Parmi les points dont les couples de coordonnées sont (1,5;0,45), (3;– 0,9), (– 1,5;5) et (– 4;1,2), précise ceux qui appartiennent à la représentation graphique de l'application linéaire f telle que : $f(x) = -0{,}3x$.

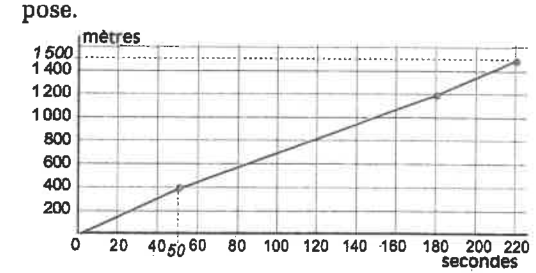
3 RÉSOLUTION GRAPHIQUE DE PROBLEMES

28 Le graphique ci-dessous décrit le parcours de deux collègues, Hassine et Kokou, qui vont dans la même direction en empruntant l'autoroute. Ils ont convenu que le premier arrivé au bout de l'autoroute attendra l'autre. Ils partent à 10h40.



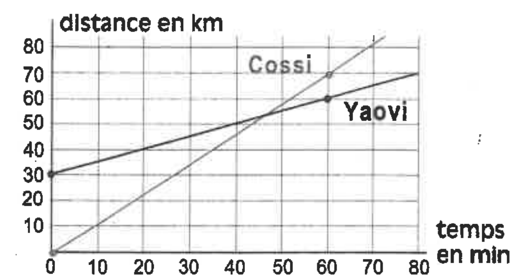
1) À quelle distance du lieu de départ se trouve la fin de l'autoroute ? Quelle est respectivement l'heure d'arrivée de Hassine et de Kokou à cet endroit ?
2) Décris le parcours de chacun des deux automobilistes (vitesses, arrêts éventuels).
3) Pendant leur parcours l'un des deux automobilistes dépasse l'autre.
À quelle heure et à quelle distance du lieu de départ s'effectue ce dépassement ? *(tu pourras faire une lecture graphique, puis confirmer tes résultats par le calcul).*
4) À 12 h, quelle distance sépare les deux hommes ?
Tu donneras une réponse au km près par lecture graphique, puis tu confirmeras par le calcul.

29 Abdou veut battre son propre record du 1 500 m. Pour cela, il demande à son entraîneur de lui préparer un plan de course ; celui-ci lui remet alors le graphique ci-dessous, mais Abdou n'y comprend pas grand-chose.
Aide Abdou à répondre aux questions qu'il se pose.



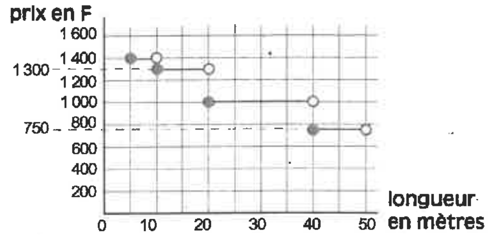
1) En combien de secondes devrai-je parcourir le 1er tour de piste (400 m) ?
Quelle sera alors ma vitesse moyenne ?
2) En combien de secondes devrai-je parcourir les 300 derniers mètres ? Ma vitesse moyenne en cette fin de course sera-t-elle plus grande que ma vitesse moyenne du 1er tour ?
3) Pourrais-je battre en même temps mon record du 1 000 m qui est actuellement de 2 min 29 s ?

30 Trois villes, Tenintou, Bougouni et Koualè sont situées dans cet ordre le long d'une route. Tenintou et Bougouni sont distantes de 30 km. Deux amis Cossi et Yaovi quittent, l'un Tenintou, l'autre Bougouni, au même instant et se dirigent vers Koualè.



Cossi roule en auto, à une vitesse de 70 km/h et Yaovi en mobylette, à la vitesse de 30 km/h.
1) Détermine graphiquement le temps t (exprimé en minutes) au bout duquel Cossi rejoindra Yaovi. Précise ta réponse par le calcul.
2) Calcule la distance séparant Tenintou et le point de rencontre.

31 Un couturier va acheter du tissu chez son grossiste qui lui propose des tarifs au mètre, en fonction de la longueur ℓ du coupon de tissu acheté.

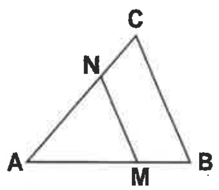


Le graphique ci-dessus représente l'application qui, au nombre de mètres de tissu acheté, associe le prix du mètre de tissu. Ecris les différents tarifs, en fonction du métrage acheté.

APPROFONDISSEMENT

32 Dans chacun des cas suivants, peux-tu trouver une application linéaire f telle que :
1) $f(2) = 5$ et $f(\sqrt{3}) = 4$.
2) $f(\sqrt{2}) = 2$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

33 L'unité de longueur est le cm.
ABC est un triangle tel que : AB = 6, AC = 7 et BC = 4. (MN) est parallèle à (BC).
On pose : AM = x et AN = y.



1) Calcule y en fonction de x.
f est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = y$. Justifie que f est une application linéaire. Précise son coefficient.
2) Calcule le périmètre $\mathcal{P}$ du triangle AMN en fonction de x. g est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathcal{P}$. Justifie que g est une application linéaire. Précise son coefficient.
3) Calcule le périmètre Q du trapèze BCNM en fonction de x. h est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = Q$.
Justifie que h est une application affine. Précise son coefficient et son terme constant.

34 Un commerçant achète un lot d'articles chez un grossiste au prix unitaire de x francs.
1) Sachant que le prix de vente hors taxes (H.T.) du commerçant est égal au prix d'achat chez le grossiste plus son bénéfice, exprime, en fonction de x, le prix de vente H.T. y_1 d'un de ces articles pour un bénéfice de 15 %.
2) Après avoir ajouté son bénéfice, le commerçant ajoute la T.V.A de 20 % pour avoir le prix de vente d'un article toutes taxes comprises (T.T.C). Exprime, en fonction de x, le prix de vente T.T.C y_2 d'un de ces articles.
3) Réponds aux mêmes questions pour un bénéfice de 25 %, puis pour un bénéfice de 50 %.

35 Djenabou n'arrive pas à régler sa montre, mais elle sait qu'elle avance de 10 s toutes les demi-heures.
1) Exprime, en fonction du temps écoulé x en min, l'avance y prise par la montre de Djenabou.
2) Calcule cette avance pour chacune des durées suivantes : 1h, 12 h, 24 h et 72 h.
3) Après quelle durée l'avance atteindra-t-elle une heure ?

36 En Physique et en Chimie, on utilise indifféremment deux échelles de température : le degré Celsius (°C) et le degré Kelvin (°K).
1) On donne les informations suivantes :
• 0 °K (le zéro absolu) est égal à – 273 °C ;
• 273 °K est égal à 0 °C ;
• il existe une application affine f telle que si T_C exprime une température (en degré Celsius), alors $T_K = f(T_C)$ exprime la même température (en degré Kelvin).
Calcule T_K en fonction de T_C.
2) Complète le tableau suivant :

T_K	0	100					456
T_C			– 155	– 70	0	100	

37 Dans les pays Anglo-Saxons, on utilise le degré Fahrenheit (°F) en lieu et place du degré Celsius (°C).
1) On donne les informations suivantes :
• – 22 °F est égal à – 30 °C ;

• 140 °F est égal à 60 °C ;
• il existe une application affine g telle que si T_C exprime une température (en degré Celsius), alors $T_F = g(T_C)$ exprime la même température (en degré Fahrenheit).
Calcule T_F en fonction de T_C, et T_C en fonction de T_F
2) Complète le tableau suivant :

T_F	– 67	–31		5		
T_C			– 10		50	120

3) Quelle est, en °F, la température de congélation de l'eau et la température d'ébullition de l'eau ?
4) Aïssatou a pris, sans le savoir, la température de sa fille avec un thermomètre gradué en °F, elle s'affole car ce thermomètre indique 98,6 °F. Quelle est, en °C, la température de sa fille ?

38 Mme Afana veut se rendre en France pour faire des achats. Elle veut échanger des F CFA contre des FF en sachant que 100 F CFA valent 1 FF. Elle se rend à la banque où on lui dit qu'il y a 2,5 % de frais sur la somme qu'elle va changer.
1) Quelles valeurs recevra-t-elle, en FF, si elle change 100 000 F CFA ? 250 000 F CFA ?
2) Exprime la somme y (en FF) que recevra Mme Afana en fonction de la somme x (en F CFA) qu'elle aura changé.
L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe y est-elle une application affine ? linéaire ?
Complète le tableau suivant :

x	200 000	500 000	750 000	900 000
y				

3) Combien de F CFA, Mme Afana doit-elle changer pour obtenir 5 000 FF ?

39 L'unité de longueur est le cm.
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3.
M est un point de [BC] tel que BM = x.
1) Exprime l'aire y_1 du triangle ABM en fonction de x. f_1 est l'application qui, au nombre réel x, associe le nombre réel y_1. f_1 est-elle une application affine ? une application linéaire ?
2) Exprime l'aire y_2 du triangle ACM en fonction de x. f_2 est l'application qui, au nombre réel x, associe le nombre réel y_2. f_2 est-elle une application affine ? une application linéaire ?
3) Dans les cas suivants, calcule la valeur de x pour que l'aire du triangle ABM soit le quart, la moitié ou les deux tiers de l'aire du triangle ABC.
4) Pour quelle valeur de x, l'aire du triangle ACM est-elle égale à $\frac{4}{5}$ de l'aire du triangle ABM ?

40 L'unité de longueur est le cm.
ABCD est un rectangle de côtés respectifs 5 cm et 3 cm. M est un point appartenant à [DC] tel que DM = x.
1) Exprime l'aire y_1 du trapèze ABCM en fonction de x.
2) Exprime l'aire y_2 du triangle ADM en fonction de x.
3) Pour quelle valeur de x, l'aire du triangle ADM est-elle la moitié de l'aire du trapèze ABCM ?

41 L'unité de longueur est le cm. ABCD est un trapèze de bases [AB], [CD] et de hauteur [AH], tel que : AB = 4, DC= 7 et AH = 3.
I est un point appartenant à [AB] tel que : AI = 1.
(L) est une droite passant par I qui coupe (DC) au point K. On pose : DK = x.
1) Exprime, en fonction de x, les aires respectives y_1 et y_2 des trapèzes AIKD et BIKC.
2) Représente graphiquement dans un même repère les applications f_1 et f_2 définies par :

$f_1(x) = \frac{3(x-1)}{2}$; $f_2(x) = \frac{3(10-x)}{2}$

Trouve graphiquement la valeur de x pour laquelle les aires des deux trapèzes sont égales.
Vérifie-la par le calcul.

42 ABC est un triangle de hauteur [AH].
Une droite (L) parallèle à (BC) coupe respectivement (AB), (AH) et (AC) aux points M, H' et N.
On pose : AH = x et AH' = y.
Exprime y en fonction de x pour que la droite (L) partage le triangle ABC en deux parties de même aire.

43 Les villes de Dakar et de Kaolack sont distantes de 190 km. M. Ndiaye quitte Dakar à 6 h et se dirige vers Kaolack au volant de son véhicule à la vitesse moyenne de 80 km/h. M. Gueye, lui, prend un taxi-brousse quittant Kaolack pour Dakar à 6 h 20 et roulant à 95 km/h de moyenne.
Détermine graphiquement, puis par le calcul :

1) L'heure et la distance entre le lieu de croisement des deux véhicules et Kaolack.
2) La distance qui sépare les deux véhicules à 7 h.

44 La petite Aminata vend des arachides grillées. Pour mesurer les quantités qu'elle vend, elle utilise quatre petites boîtes dont elle sait qu'elles contiennent respectivement : 50 g, 100 g, 200 g et 250 g d'arachides.
Les prix qu'elle propose pour le contenu d'arachides de chacune de ces boîtes sont respectivement : 25 F, 45 F, 85 F et 105 F.
1) Complète le tableau de correspondance suivant :

Masse en g				
Prix de vente en F				

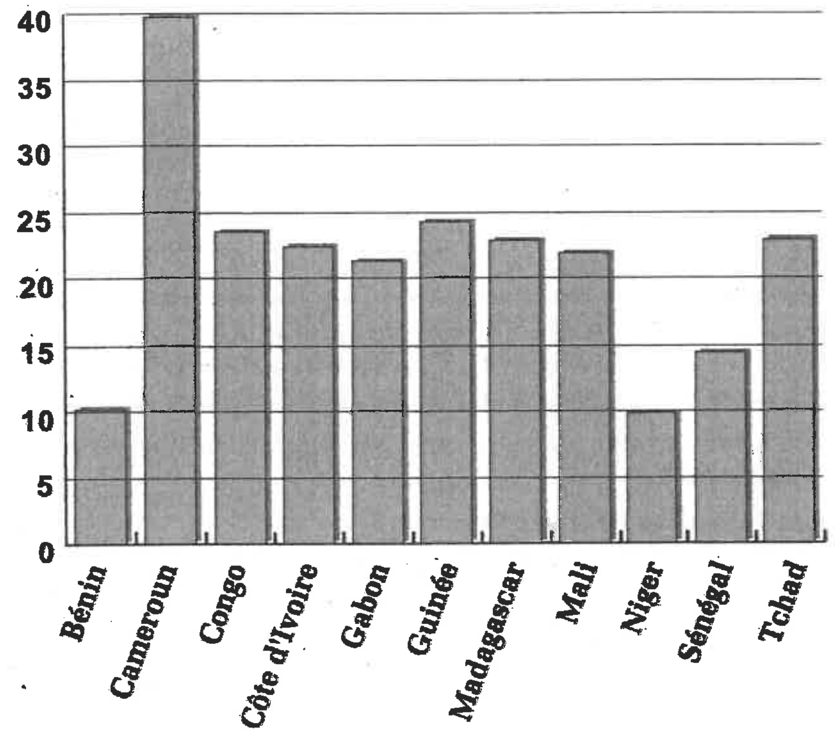
Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?
2) Place les points du tableau précédent dans un repère orthogonal (O, I, J). (en abscisse, place les masses et en ordonnée, les prix de ventes)
Que constates-tu pour ces quatre points ?
3) Démontre que ces quatre points appartiennent à la droite (D) d'équation : $y = 0,4x + 5$.
Trouve graphiquement, puis par le calcul le prix de vente correspondant à 150 g et à 500 g d'arachides.
À quelle masse d'arachides correspond un achat de 445 F ?

45 Les intérêts composés
Le 1er février 1997, M Barkindo, qui possède un capital, se décide à le placer à la banque qui lui propose un taux d'intérêt de 5 % l'an.
1) Dans le cas où M Barkindo dépose un capital de 100 000 F et sachant qu'il cumule les intérêts produits et son capital, calcule le nouveau capital de M Barkindo le 1er février 1998. Le 1er février 1999. Le 1er février de l'an 2000.
2) Sachant que M Barkindo place un capital de x F, exprime, en fonction de x :
– le capital y_1 de M Barkindo le 1er février 1998 ;
– le capital y_2 de M Barkindo le 1er février 1999 ;
– le capital y_n de M Barkindo au bout de n années de placement.

46 Une facture de téléphone
M Ngongui se fait installer le téléphone à son domicile avec la seule possibilité de téléphoner en ville. Pour avoir une idée des factures qu'il devra payer, il demande quelques renseignements sur le mode de facturation des communications. La compagnie de télécommunications lui fournit les précisions suivantes :
– l'unité de taxation dite Taxe de Base (TB) est fixée à 58 F ;
– 1 TB est comptabilisée toutes les 6 minutes de communication (en ville) ;
– l'abonnement bimestriel est de 6 960 F ;
– une T.V.A de 11,11 % est appliquée sur le montant total.,
1) Exprime, en fonction du nombre x de minutes de communication, le montant y d'une facture.
2) Calcule le montant d'une facture bimestrielle (60 jours) dans le cas où M Ngongui téléphonerait 18 min par jour ; 24 min par jour ; 1 h par jour.
3) M Ngongui reçoit sa première facture bimestrielle pour un montant total de 65 732 F.
Quel est le nombre moyen de TB « utilisé » chaque jour ?

47 La torréfaction du café
Un négociant en café veut commercialiser lui-même des paquets de 1 kg de café moulu qui sont composés d'un mélange d'une masse x (exprimée en kg) de robusta, et le reste constitué d'arabica. Pour cela, il achète le café vert, à 500 000 F la tonne de robusta et à 850 000 F la tonne d'arabica.
Les différents frais (transports, décorticage, séchage, torréfaction, ...) de fabrication du café s'élèvent à 1 000 F par kg, quel que soit la composition du mélange, et l'emballage coûte 100 F par kilo.
1) Exprime, en fonction de x, le prix de revient y_1 du paquet d'un kilo de mélange. Quel est le prix de revient d'un paquet de café à 70 % de robusta et 30 % d'arabica ?
2) Exprime, en fonction de x, le prix de vente y_2 d'un kilo de mélange emballé, sachant que le négociant prend un bénéfice de 30 % sur son prix de revient. Donne le prix de vente d'un paquet de 1 kg de café dans chacun des cas suivants :
• il contient 70 % de robusta et 30 % d'arabica ;
• il contient 50 % de robusta et 50 % d'arabica.

16 Statistiques



Répartition des forêts et formations boisées dans quelques pays d'Afrique (en millions d'hectares)

SOMMAIRE

1 Étude d'un caractère qualitatif

1.1 ORGANISATION DES DONNÉES

L'enquête

M. SOW mène une enquête concernant les concessions habitées de l'agglomération de Kolobane, pour le compte du Ministère de l'Urbanisation et de l'Équipement.
Les questions posées à chacun des chefs de famille sont :

① *Quel est le statut de la concession que vous habitez ?*
Marquer ✗ dans la case de la réponse qui convient.
☐ *En location* ☐ *Occupation gratuite* ☐ *Copropriété* ☐ *Propriété*

② *Quel est le nombre d'occupants de la concession ?*

La première question de cette enquête est destinée à l'étude du statut de chaque concession.
Il s'agit d'un caractère qualitatif ; il présente quatre modalités qui sont :
Concession louée ; concession gratuite ; concession en copropriété ; concession en propriété.

Les réponses à cette première question constituent une **série statistique**, organisée dans le tableau suivant.

Tableau des effectifs et des fréquences

Modalités	Concessions louées	Concessions gratuites	Concessions en copropriété	Concessions en propriété	Totaux
Effectifs	99	66	132	363	660
Fréquences	15 %	10 %	20 %	55 %	100 %

1.2 TRAITEMENT DES DONNÉES

Le mode

Dans l'étude du caractère « statut de la concession », la modalité la plus fréquente est la concession en propriété individuelle. On trouve cette modalité 363 fois.
On dit que la modalité « concession en propriété » est le **mode** de la série statistique.

DÉFINITION

On appelle mode d'une série statistique toute modalité dont l'effectif est maximal.

Remarque

Une série peut avoir deux modes (ou plus).

Exemple

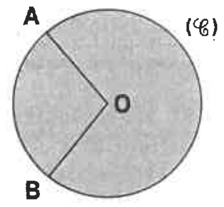
Pour compléter leur collection, les élèves de 3^eM_1 du Collège d'Enseignement Moyen Général Falilou DIOP sont chargés par leur professeur de sciences naturelles de capturer des papillons de diverses variétés. Le tableau de chasse est organisé comme suit :

Variétés de papillons	acherontia atropos	papilio dardanus	danaus chrysippus	papilio nireus	papilio lormieri	charaxes nobilis
Nombres	2	9	4	7	9	4

L'effectif le plus élevé est atteint pour deux modalités : B et E.
La série présente **deux modes** : B et E.

1.3 REPRÉSENTATION PAR DES DIAGRAMMES CIRCULAIRES

Secteurs circulaires



Le disque (𝒞) a un rayon de 15 mm. A et B sont deux points du cercle (𝒞). [AB] n'est pas un diamètre.

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ partage le disque en deux **secteurs circulaires**. Celui qui a l'aire la plus petite est limité par l'arc $\overset{\frown}{AB}$, celui qui a l'aire la plus grande est limité par l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

On convient de dire que :

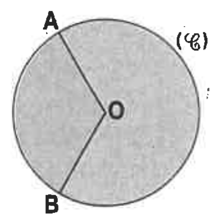
- chacun des deux secteurs circulaires déterminés par l'angle au centre a une mesure, exprimée en degré ;
- la **mesure du secteur circulaire** limité par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$;
- la mesure du secteur circulaire limité par l'arc $\overset{\smile}{AB}$ est égale à 360° – mes $\widehat{AOB}$,
- Un diamètre détermine deux demi-disques, de mesure 180° chacun.

Exemple de calcul d'aire d'un secteur circulaire

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ du cercle (𝒞) a une mesure de 120°.

- *Quelle est la mesure de chacun des deux secteurs circulaires déterminés par l'angle $\widehat{AOB}$?*
- *Quelles sont, en mm², les aires respectives de chacun des deux secteurs circulaires ?*
- *Exprime (en pourcentage), le quotient de l'aire du secteur circulaire limité par l'arc $\overset{\smile}{AB}$ par l'aire du disque.*

(On choisira π ≈ 3,1 pour effectuer les calculs.)



Le petit secteur circulaire a une mesure de 120°, le grand a une mesure de 240°.
Aire du cercle (en cm²) : $3{,}1 \times (1{,}5)^2 = 6{,}975$

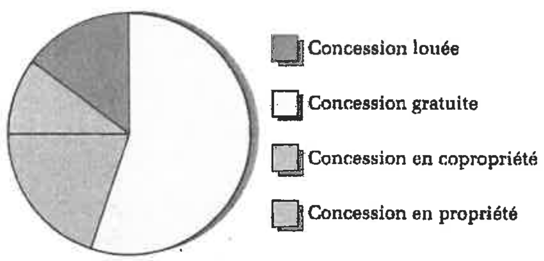
Tableau de proportionnalité

Mesure des secteurs circulaires	120°	240°	360°
Aires des secteurs circulaires	2,325 cm²	4,65 cm²	6,975 cm²

EXERCICE

1.a Un disque est partagé en deux secteurs circulaires dont les aires respectives représentent 45% et 55% de l'aire du disque.
Quelle est la mesure de chacun de ces secteurs circulaires ?
Quelle est la mesure de l'angle au centre qui définit ces deux secteurs ?

Diagramme circulaire



Sur un disque, on peut représenter les fréquences (ou les effectifs) de chaque modalité d'une distribution statistique par des secteurs circulaires dont la mesure est proportionnelle à la fréquence (resp. à l'effectif) de la modalité qu'ils représentent.

On utilise un tableau de proportionnalité, de coefficient 360, pour calculer ces mesures :

Modalités	Concessions louées	Concessions gratuites	Concessions en copropriété	Concessions en propriété	Totaux
Fréquences	15 %	10 %	20 %	55 %	100 %
Mesures du secteur circ.	54°	36°	72°	198°	360°

Remarque
On choisira de représenter une série par un diagramme circulaire (ou semi-circulaire) lorsque le nombre de modalités est petit.

EXERCICE

1.b Un téléfilm documentaire est organisé en cinq parties d'une durée respective de : 1 min ; 2 min 15 s ; 4 min 25 s ; 4 min 50 s et 2 min 30 s.
Trace un diagramme circulaire représentant la répartition des durées de ces cinq parties.

2 Étude d'un caractère quantitatif

2.1 ORGANISATION DES DONNÉES

L'enquête

La deuxième question de l'enquête menée par M. SOW étudie un autre caractère des concessions, le nombre des occupants. Le nombre d'habitants de chaque concession forme la liste des modalités; le caractère étudié est donc quantitatif.
Les réponses à cette deuxième question constituent une série statistique, organisée dans le tableau suivant.

Tableau des effectifs et des fréquences

Modalités	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Totaux
Effectifs	33	46	53	46	79	60	43	86	91	66	57	660
Fréquences en %	5	7	8	7	12	9,1	6,5	13	13,8	10	8,6	100

Effectifs et fréquences cumulés

À l'aide de ce tableau, on veut déterminer combien de concessions ont un nombre d'habitants inférieur ou égal à 7.
On trouve ce nombre en effectuant la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à 7.

$$33 + 46 + 53 + 46 + 79 = 257$$

DÉFINITION

- **On appelle effectif cumulé de la modalité n, la somme des effectifs de chaque modalité inferieure ou égale à n.**
- **On appelle fréquence cumulée de la modalité n, le quotient de l'effectif cumulé de la modalité n par l'effectif total.**

Calcul d'un effectif cumulé

Reprenons le tableau des effectifs

Modalités	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Totaux
Effectifs	33	46	53	46	79	60		86	91	66	57	660

$\underbrace{33 + 46 + 53 + 46}$ — 178 concessions abritent un nombre d'habitants plus petit que 7

$\underbrace{178 \quad + \quad 79}$ — 79 concessions abritent 7 habitants

257 — 257 concessions abritent un nombre d'habitants inférieur ou égal à 7.

257 est l'effectif cumulé de la modalité 7.

$\frac{257}{660}$ c'est-à-dire 0,39 ou encore 39% est la fréquence cumulée de la modalité 7.

Tableau des effectifs et fréquences cumulées

Modalités	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	33	46	53	46	79	60	43	86	91	66	57
Effectifs cumulés	33	79		178	257						
Fréquences (en %)	5	7	8	7	12	9,1	6,5	13	13,8	10	8,6
Fréquences cumulées (en %)	5			27	38,9						

- Complète ce tableau.

Exemple d'exploitation d un tableau des effectifs cumulés

Pour un contrôle de Mathématiques effectué en classe de $3^{e}M_1$ du collège Aline Sitoë Diatta, chacun des 56 élèves de la classe a obtenu une des huit notes suivantes :

5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18.

Tableau des effectifs cumulés

Notes attribuées	5	8	10	11	13	15	16	18
Effectifs cumulés	3	7	12	17	24	36	50	56

3 élèves ont obtenu la note 5. 7 élèves ont obtenu une note inférieure ou égale à la note 8. Donc (7 – 3) élèves ont obtenu la note 8.

- Combien d'entre eux ont-ils obtenu la note 10 ? la note 11 ?
- À l'aide du tableau des effectifs cumulés, complète le tableau des effectifs ci-dessous.

Tableau des effectifs

Modalités	5	8	10	11	13	15	16	18	Totaux
Effectifs	3	4							56

Langage courant	Langage des statistiques
Combien d'élèves ont-ils obtenu une note inférieure ou égale à 15 ?	Quel est l'effectif cumulé de la modalité 15 ?
Quel est le pourcentage des élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 10 ?	Quelle est la fréquence cumulée de la modalité 10 ?

EXERCICE

2.a Dans un lycée, on a recensé le nombre d'élèves par classe. Les résultats sont repris dans le tableau ci-dessous.

Modalités : nombre d'élèves dans chaque classe.

Effectifs : nombre de classes ayant le même nombre d'élèves.

Modalités	18	26	28	30	32	35	40	45	50	55	60
Effectifs	1	1	3	2	3	2	4	2	6	6	15
Eff. cumulés											

Complète ce tableau en précisant les effectifs cumulés.

Quel est le nombre des classes ayant moins de 48 élèves ?

2.2 TRAITEMENT DES DONNÉES

La moyenne

Calculons la moyenne du nombre d'habitants par concession. Pour cela, utilisons le tableau des effectifs, complété par une ligne de calculs auxiliaires.

Modalités	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Totaux
Effectifs	33	46	53	46	79	60	43	86	91	66	57	660
Produit des modalités par les effectifs	99	184	265	276	553	480	387	860	1 001	792	741	5 638

La moyenne est : $\frac{5\,638}{660}$

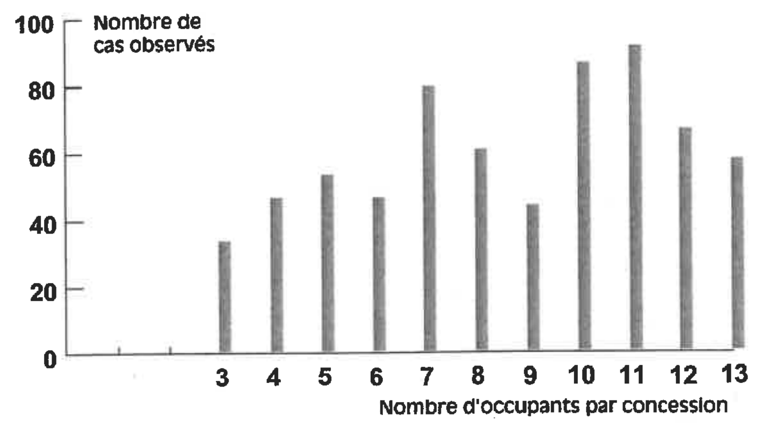
L'arrondi d'ordre 2 de la moyenne est : 8,54

Le mode

11 est le mode de cette série statistique car c'est la modalité qui a l'effectif le plus grand. Le nombre le plus fréquent d'habitants par concession est 11. On le trouve 91 fois.

2.3 REPRÉSENTATION PAR DES DIAGRAMMES

Diagramme en bâtons



Voici une autre façon de représenter les séries statistiques.

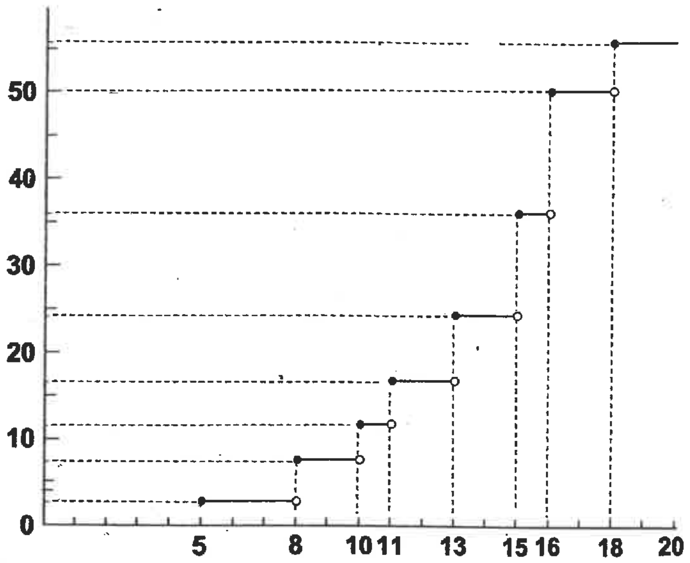
Chaque modalité est représentée par un trait (un « bâton ») de longueur proportionnelle à son effectif.

Exemple de diagramme cumulatif

Reprenons le tableau des effectifs cumulés correspondant à la série statistique des notes obtenues au contrôle de mathématiques en 3^{e} M_1.

Modalités	5	8	10	11	13	15	16	18
Effectifs cumulés	3	7	12	17	24	36	50	56

Diagramme cumulatif



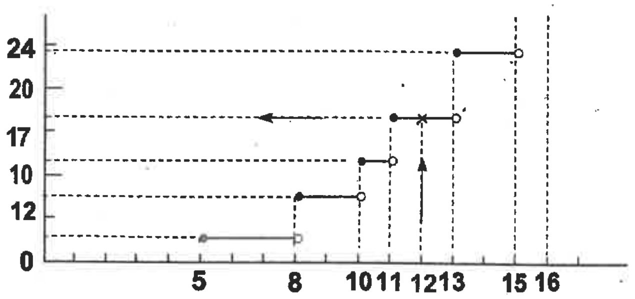
Le tableau des effectifs cumulés permet de définir l'application f.

Pour :

$x \in [\leftarrow ; 5[$ $\quad f(x) = 0$
$x \in [5 ; 8[$ $\quad f(x) = 3$
$x \in [8 ; 10[$ $\quad f(x) = 7$
$x \in [10 ; 11[$ $\quad f(x) = 12$
$x \in [11 ; 13[$ $\quad f(x) = 17$
$x \in [13 ; 15[$ $\quad f(x) = 24$
$x \in [15 ; 16[$ $\quad f(x) = 36$
$x \in [16 ; 18[$ $\quad f(x) = 50$
$x \in [18 ; \rightarrow[$ $\quad f(x) = 56$

Ce diagramme cumulatif est la représentation graphique de l'application f qui, à un nombre, fait correspondre le nombre des élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à ce nombre.

Lecture du diagramme cumulatif



Tu trouves, par lecture directe, le nombre d'élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 12 ; c'est l'image de 12 par l'application f.

- Combien d'élèves ont-ils obtenu une note inférieure ou égale à 13 ? à

3 Regroupement en classes

Beaucoup de situations ne peuvent être étudiées en considérant toutes les modalités, car soit celles-ci sont trop nombreuses, par exemple les tailles, au cm près, des élèves d'une classe, soit difficile à préciser exactement, par exemple, le nombre d'habitants d'une ville. Une méthode d'étude consiste à regrouper des modalités voisines.

3.1 ORGANISATION DES DONNÉES

Regrouper en classes d'egale amplitude

Le maître d'éducation physique et sportive décide de séparer ses élèves en plusieurs groupes. Pour cela, il a mesuré la taille, en mètres, de ses élèves et trouvé :

1,54	1,53	1,57	1,59	1,54	1,55	1,60	1,63	1,59	1,67
1,61	1,63	1,67	1,69	1,68	1,69	1,70	1,72	1,73	1,64
1,74	1,78	1,55	1,76	1,75	1,79	1,66	1,77	1,67	1,69
1,59	1,76	1,64	1,67	1,69	1,79	1,76	1,59	1,74	1,78
1,73	1,68	1,65	1,71	1,78	1,65	1,57	1,58	1,65	1,54

Il forme trois groupes :
– le groupe des « petits » formé des élèves dont la taille appartient à [1,50 ; 1,60[.
– le groupe des « moyens » formé des élèves dont la taille appartient à [1,60 ; 1,70[.
– le groupe des « grands » formé des élèves dont la taille appartient à [1,70 ; 1,80[.

On dit qu'il a regroupé les élèves en trois **classes** :
la classe [1,50 ; 1,60[, la classe [1,60 ; 1,70[et la classe [1,70 ; 1,80[.
On obtient ainsi une série statistique.

Il organise les données dans un tableau des effectifs et des fréquences.

Classes	[1,50 ; 1,60[	[1,60 ; 1,70[	[1,60 ; 1,80[	**Totaux**
Effectifs				50
Fréquences en %				100

- Combien d'élèves y a-t-il dans chaque groupe ? C'est-à-dire, quel est l'effectif de chaque classe ?
- Détermine la fréquence de chaque classe.

Remarque
Toutes les classes ont la même **amplitude** : 0,1 m.

EXERCICE

3.a Dans cette ville, on a relevé le nombre de salles de classes de chaque établissement scolaire.

11	10	12	14	11	14	5	5	20	23	24	9	9	17	19
22	22	7	8	4	25	8	15	11	26	10	16	6	11	14
5	16	18	21	7	13	14	10	9	18	4	5	6	17	23
14	10	14	11	8	9	20	16	18	7	14	14	6	10	5

Complète le tableau suivant.

Nombre de salles	de 4 à 7	de 8 à 11	de 12 à 15	de 16 à 19	de 20 à 23	de 24 à 27
Effectifs						
Fréquences						

3.2 TRAITEMENT DES DONNÉES

Classe modale

Dans l'étude précédente, l'effectif de la classe [1,60; 1,70[est le plus grand. Cette classe est appelée **la classe modale** de la série.

EXERCICE

3.b On a relevé les précipitations (pluie) du mois de Juin, dans un certain nombre de villes. Les résultats, exprimés en cm, sont organisés dans le tableau suivant.

Précipitations	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
nbres de villes	13	24	17	11	5

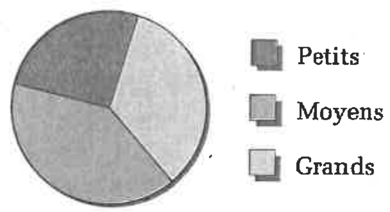
Quelle est la classe modale ?

3.3 REPRÉSENTATION PAR DES DIAGRAMMES

Diagramme circulaire, diagramme à bandes

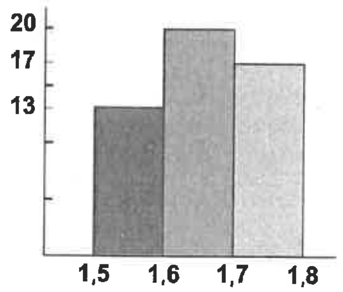
Pour dessiner le diagramme circulaire correspondant au tableau des effectifs des tailles des élèves, on détermine les mesures des secteurs circulaires associés aux classes. La mesure d'un secteur est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.

Classes	[1,5 ; 1,6[	[1,6 ; 1,7[	[1,7 ; 1,8[	Total
Effectifs	13	20	17	50
Mesures (en degrés)	93,5°	144°	122,5°	



Pour dessiner le diagramme à bandes correspondant au tableau des effectifs des tailles des élèves, on trace dans un repère orthogonal des bandes juxtaposées de même largeur et de hauteurs (ici, en cm) proportionnelles aux effectifs correspondants.

Classes	[1,5 ; 1,6[	[1,6 ; 1,7[	[1,7 ; 1,8[	Total
Effectifs	13	20	17	50
Hauteur	1,95	3,0	2,55	



Exemple d'interprétation d'un diagramme circulaire

Ce diagramme résume les résultats de 828 candidats à un examen, suivant leur note obtenue N.
E, R, A et M désignent les secteurs circulaires qui représentent quatre classes de candidats.

E : candidats éliminés, $0 \leq N < 5$
R : candidats repris à l'oral, $5 \leq N < 10$
A : candidats admis, $10 \leq N < 15$
M : candidats brillants, $15 \leq N < 20$

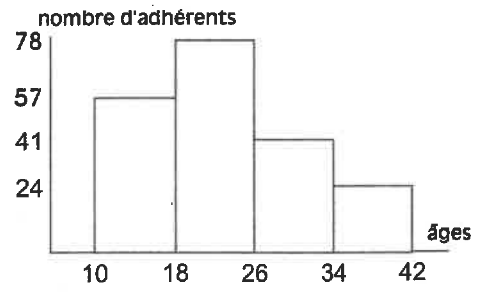
On peut lire la mesure des trois secteurs circulaires E, M, A à l'aide d'un rapporteur, et déterminer par le calcul la mesure du secteur circulaire R.

L'analyse du diagramme permet d'obtenir un tableau donnant les effectifs et les fréquences. Les notes s'échelonnent de 0 à 20 et les classes sont d'amplitude 5.

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	230	437	138	23
Fréquences (%)	27,77	52,77	16,66	2,77

- Quelle est la classe modale ?

Exemple d'interprétation d'un diagramme à bandes



Le président d'un club omnisport NAWETANE a signé cette année un certain nombre de licences pour ses adhérents, lesquels sont répartis d'aprés leur âge et selon le diagramme ci-contre.

- Quelle est la classe modale ?
- Quel est le nombre total des adhérents de ce club ?
- Détermine le pourcentage de chaque classe.
- Dessine le diagramme circulaire représentant ces pourcentages.

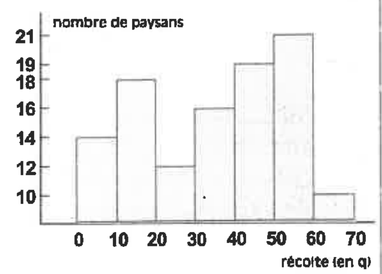
EXERCICES

3.c Après l'obtention de son baccalauréat, un élève répertorie toutes les notes de mathématiques qu'il a obtenues de la sixième à la terminale : il a organisé ses résultats dans le tableau suivant :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	16	21	36	27

Quelle est la classe modale ?
Dessine le diagramme circulaire et le diagramme à bandes de cette série.

3.d Une enquête a porté sur la récolte d'arachides d'une coopérative rurale, près de Gaudou. Le diagramme ci-contre représente le nombre de paysans et les masses en quintaux de leurs récoltes (regroupées en classes d'amplitude 10 quintaux).
– Organise ces données dans un tableau des effectifs et des fréquences de chaque classe.
– Détermine le nombre de paysans qui ont récolté un nombre de quintaux plus petit que 40.



ENTRAÎNEMENT

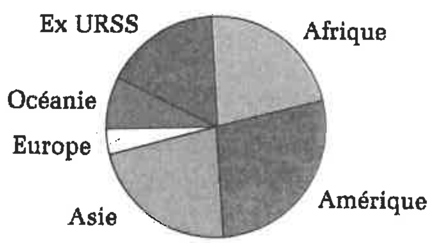
1 ÉTUDE D'UN CARACTÈRE QUALITATIF

1 En 1992, 130 554 tonnes d'ananas ont été exportées par 20 structures.
Quel est le pourcentage du tonnage exporté par chacune des trois compagnies suivantes : FDL, SIGA et CFC, qui ont traité respectivement 17 855 t, 21 224 t et 22 017 t d'ananas ?

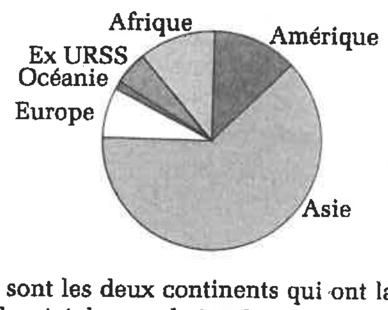
2 En 1988 et 1989, 127 754 tonnes de coton-fibre ont été produits dans cette région, dont 16,3 % ont été consommés par l'industrie textile locale.
Quel a été le tonnage exporté ces deux années ?

3 Au parc d'attractions, un observateur a compté 112 promeneurs adultes et 138 enfants. Trace le diagramme circulaire traduisant cette situation.

4 Le diagramme circulaire ci-dessous donne la répartition par continent de la superficie des terres



Le diagramme ci-dessous représente la répartition par continent de la population mondiale.



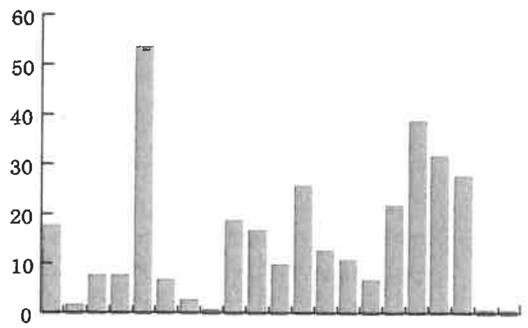
Quels sont les deux continents qui ont la plus forte densité de population ?
Quel est le continent qui a la plus faible densité de population ?

5 Pour améliorer ses approvisionnements chez le grossiste, le vendeur de tissus a décidé d'étudier ses ventes.
Chaque fois qu'il vend un pagne, il note comme suit :
w pour Wax , b pour Basin , r pour Basin "riche" , k pour Batik et c pour Coton .
Voici le tableau obtenu après une semaine :

r	k	w	w	c	k
k	k	w	k	w	k
k	r	k	b	r	k
c	c	k	r	r	b
k	b	k	w	w	r
w	k	b	c	w	b

Pour ce caractère étudié, précise
a) la liste des modalités
b) l'effectif total
c) le tableau des effectifs
d) le tableau des fréquences
e) le mode
Construis un tableau des effectifs et des fréquences, trace le diagramme circulaire des effectifs.

6 L'enquête porte sur le texte suivant :
« Il est intéressant de remarquer que plus un mot est fréquent, plus son sens est large et peu précis. Ceci tient au fait qu'il est utilisé dans un grand nombre de phrases différentes au sein desquelles les autres mots lui donnent un sens particulier. De même, on peut noter que plus un mot est fréquent et son sens variable, plus il est court. Les mots grammaticaux sont à la fois fréquents, peu précis, et courts. »
Ce texte utilise 21 lettres différentes réparties en 329 signes typographiques.
Le diagramme ci-dessous représente cette série.



a) Quel est le mode ?

Quelle est la consonne la plus fréquente ?
Quelles sont les lettres qui n'apparaissent pas dans ce texte ?
b) De cette population, on étudie les 133 signes typographiques qui constituent l'ensemble des voyelles.
Complète le tableau des effectifs des voyelles; calcule les fréquences.

Voyelles	a	e	i	o	u	y
Effectifs						

Trace un diagramme a bandes des effectifs.
Trace un diagramme circulaire des fréquences.

2 ÉTUDE D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF

7 On a relevé les âges, au 01/06/96, des élèves d'une classe de Troisième.

14	15	13	15	15	14	14	16	15	14
15	14	14	14	13	15	14	16	15	15
15	16	15	15	14	16	13	14	14	14
14	14	14	15	15	16	15	13	15	14
16	15	15	14	14	13	14	15	15	15

Construis le tableau des effectifs et des fréquences.
Trace le diagramme circulaire des effectifs.
Quel est l'âge moyen d'un élève de cette classe ?

8 Un vendeur de montres-bracelets les a classées selon leur prix : 25 coûtent 2 000 F ; 38 coûtent 3 500 F; 25 coûtent 4 500 F ; 25 coûtent 5 000 F ; 50 coûtent 7 000 F et 29 coûtent 9 000 F.
Trace le tableau des effectifs, des effectifs et des fréquences cumulés.
Quel est le prix moyen d'une montre ? Quel est le mode ?
Quel est le pourcentage de montres dont le prix est plus petit que 7 000 F ?
Quel est le pourcentage des montres dont le prix est supérieur ou égal à 4 500 F ?

9 Dans une classe, le relevé des notes attribuées après un contrôle est :

4	11	14	6	8	8	18	10	5	5
10	10	12	2	17	5	12	14	4	17
8	13	15	18	14	15	4	9	17	13
5	11	4	16	2	12	13	10	17	5
15	8	11	14	8	6	15	19	9	13

Établis un tableau des effectifs et des fréquences des notes.

Complète ce tableau en précisant les effectifs cumulés.
Quel est le mode du caractère étudié ?
Calcule la moyenne des notes du devoir.
Quel est le nombre d'élèves qui ont une note plus petite que la moyenne ?
Quel est le nombre d'élève qui ont une note inférieure ou égale au mode ?
Trace le diagramme en bâtons des effectifs.

3 REGROUPEMENT EN CLASSE DE MÊME AMPLITUDE

10 Reprends la liste des notes de l'exercice 9 et établis un tableau des effectifs en regroupant les modalités en 5 classes d'amplitude 4.
Calcule la fréquence de chaque classe.
Quelle est la classe modale ?
Trace le diagramme à bandes représentant ce regroupement en classes.

11 À l'approche de la fête de Tabaski, un éleveur de moutons les classe selon leurs poids et leurs prix. Il a organisé les données dans le tableau suivant :

Poids	[25 ; 35[	[35 ; 45[
Prix	50 000 F	60 000 F
Effectifs	27	51

Poids	[45 ; 55[	[55 ; 65[
Prix	70 000 F	80 000 F
Effectifs	39	18

Détermine le pourcentage des moutons dont le prix est plus petit que 60 000F.
Trace le diagramme circulaire et le diagramme à bandes des effectifs de cette série.
Quelle est la classe modale ?

12 Un chauffeur de taxi a noté dans la semaine le nombre et la distance de ses courses.

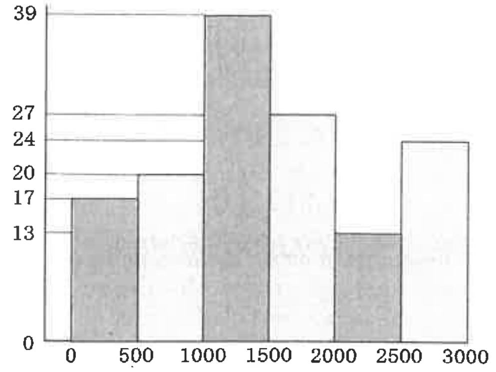
Dist. (en km)	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[
Effectifs	17	28	47
Fréquences			

Dist. (en km)	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Effectifs	23	5	3
Fréquences			

Complète le tableau ci-dessus.

Trace le diagramme cumulé des effectifs et le diagramme à bandes.

13 Un autre chauffeur de taxi a préféré noter le tarif des courses, ce qui a permis de construire le diagramme à bandes suivant :



Établis un tableau des effectifs et des fréquences des classes représentées par ce diagramme.
Détermine la classe modale.

14 La population d'une ville de 13 748 habitants est répartie en cinq classes d'égale amplitude, de la façon suivante :

- Le 3e âge : 2,4%.
- L'âge mûr : 11,5%.
- Les adultes : 27%.
- Les jeunes adultes : 35%.
- Les jeunes : 24,1%.

(La personne la plus âgée a 98 ans)
Pour ce regroupement en classes, établis un tableau des effectifs et des fréquences.
Quelle est la classe modale ?
Représente ces données par un diagramme à bandes.

15 Pour procéder au ramassage des élèves, le service d'intendance d'une école privée a mené une enquête sur la distance (DE) domicile-école.
L'unité de longueur est le km.
Sur un effectif de 2 745 élèves,
$0 \leq DE < 3$: 21% des élèves,
$3 \leq DE < 6$: 28%
$6 \leq DE < 9$: 31%
$9 \leq DE < 12$: 13 %
$12 \leq DE < 15$: les autres élèves.
Établis un tableau des effectifs et des fréquences.
Quel est le nombre d'élèves habitant à une distance inférieure ou égale à 6 km ?
Dessine le diagramme circulaire des fréquences.

16 Lors de l'épreuve de saut en hauteur, les élèves d'une classe de troisième ont réalisé les performances suivantes : 13 élèves ont sauté 1,50 m ou entre 1,50 m et 1,60 m ; 17, 1,40 m ou entre 1,40 m et 1,50 m ; 24, 1,30 m ou entre 1,30 m et 1,40m ; 8, 1,20 m ou entre 1,20 m et 1,30 m ; 19, 1,10 m ou entre 1,10 m et 1,20 m.
Établis un tableau des effectifs et des fréquences.
Quel est le nombre d'élèves qui ont effectué un saut plus petit que 1,40 m ?
Dessine le diagramme à bandes des fréquences.
Pour obtenir la note de 10 sur 20 (ou une meilleure note), il faut réaliser un saut supérieur ou égal à 1,20 m. Quel est le nombre des élèves qui ont réalisé cet exploit ?

17 Une course populaire a été organisée sur une distance de dix kilomètres, les durées de course de chaque candidat sont résumées dans le tableau suivant :

catégories	tortues	éléphants	lions
durées (mn)	[90 ; 80]	[80 ; 70]	[70 ; 60]
effectifs	363	445	658

catégories	buffles	léopards	gazelles
durées (mn)	[60 ; 50]	[50 ; 40]	[40 ; 30]
effectifs	252	231	51

Complète le tableau ci-dessus en précisant les fréquences.
Trace le diagramme circulaire des effectifs.
Quel est le pourcentage des participants ayant couru pendant une durée plus grande que 50 minutes ?

18 Une enquête effectuée auprès des professeurs pour déterminer leurs nombres d'années d'enseignement a donné les résultats suivants :

Ancienneté	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[
Nbre de prof.	65	147	374	

Ancienneté	[16;20[	[20;24[	[24;28[
Nbre de prof.	587	489	58

Trace le diagramme à bandes et le diagramme circulaire.
Détermine le nombre de professeurs n'ayant pas encore 16 ans d'ancienneté et le nombre de professeurs ayant une ancienneté supérieure ou égale à 12 ans.

SUJET 1

Exercice 1

On donne : $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$.

1) Écris l'inverse de a sans radical au dénominateur.
2) Compare l'inverse de a et $a - 1$.
3) En utilisant la réponse de la question précédente, démontre que : $a^2 = a + 1$.
4) Donne un encadrement de l'inverse de a par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.
5) Donne un encadrement du carré de a par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

Exercice 2

Trouve les dimensions d'un champ rectangulaire sachant que si l'on augmente la longueur et la largeur de 2 m, l'aire du champ augmente de 84 m², tandis que si l'on augmente la largeur de 3 m et diminue la longueur de 5 m, l'aire diminue de 31 m².

Exercice 3

Le directeur de ton collège veut déterminer la longueur d'un mât planté dans la cour.
En considérant que les rayons du soleil sont parallèles, le directeur procède de la manière suivante :
– il fixe sur ce mât, à 2 m du sol, un gros boulon ;
– il mesure l'ombre du mât sur le sol et obtient 4,75 m ;
– il mesure en même temps la distance de l'ombre de ce boulon au pied du mât ; il obtient 0,95 m.
Fais un schéma. Quelle est la longueur du mât ?

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité de longueur est le centimètre. On donne les points : A (7;1), B(8;4) et C(–1;7).

1) • Fais une figure que tu compléteras au fur et à mesure de ta progression dans l'énoncé.
• Calcule les distances AB, BC et CA.
• Démontre que le triangle ABC est rectangle.

2) M est le milieu du segment [AC] et D le symétrique de B par rapport à M.
• Détermine le couple de coordonnées du point M.
• Démontre que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

3) P est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Détermine le couple de coordonnées du point P.

4) ($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit au triangle ABC.
• Précise le centre et le rayon du cercle ($\mathscr{C}$).
• Justifie que les points D et O appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$).
• Démontre que la droite (OP) est tangente au cercle ($\mathscr{C}$).
• Détermine une équation de la droite (OP).

SOLUTION

Exercice 1

1) Écriture de l'inverse de a

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}$$

$$\boxed{\frac{1}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \quad ①$$

2) Comparaison de $a - 1$ et $\frac{1}{a}$

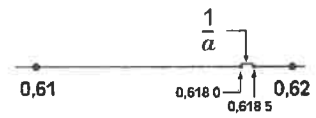
$$a - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \boxed{a - 1 = \frac{1}{a}} \quad ②$$

3) Expression de a^2

② permet d'écrire : $a(a-1) = 1$
par conséquent : $a^2 - a = 1$ $\qquad \boxed{a^2 = a + 1}$ ③

4) Encadrement de $\frac{1}{a}$

On a : $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$
Donc : $1{,}236 < -1+\sqrt{5} < 1{,}237$
$$0{,}618\,0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 0{,}618\,5$$



$\boxed{0{,}61 < \frac{1}{a} < 0{,}62}$ ④

5) Encadrement de a^2

② et ④ permettent d'écrire : $0{,}61 < a - 1 < 0{,}62$
En tenant compte de ③ : $2{,}61 < a + 1 < 2{,}62$

Par conséquent : $\boxed{2{,}61 < a^2 < 2{,}62}$ ⑤

Exercice 2

Choix des inconnues :
désignons par L la longueur et par ℓ la largeur de ce champ (l'unité de longueur est le m).

Mise en équation :

- « Si l'on augmente la longueur et la largeur de 2 m, l'aire du champ augmente de 84 m² »,

se traduit par : $(L + 2)(\ell + 2) = L \times \ell + 84$

c'est-à-dire : $L \times \ell + 2L + 2\ell + 4 = L \times \ell + 84$

$L \times \ell$ se trouve dans les deux membres de cette équation. On peut l'éliminer en ajoutant $(-L \times \ell)$ à chaque membre de l'équation.

On obtient : $2L + 2\ell + 4 = 84$

Donc : $2(L + \ell + 2) = 2 \times 42$

$L + \ell + 2 = 42$

Par conséquent : $\boxed{L + \ell = 40}$ ①

- « Si l'on augmente la largeur de 3 m et diminue la longueur de 5 m, l'aire diminue de 31 m² »,

se traduit par : $(L - 5)(\ell + 3) = L \times \ell - 31$

c'est-à-dire : $L \times \ell + 3L - 5\ell - 15 = L \times \ell - 31$

comme précédemment : $3L - 5\ell - 15 = -31$

Par conséquent : $\boxed{3L - 5\ell = -16}$ ②

- On obtient le système : $\boxed{\begin{cases} L + \ell = 40 & ① \\ 3L - 5\ell = -16 & ② \end{cases}}$ Ⓢ

Résolution du système Ⓢ :

- Dans le plan muni d'un repère,

① est une équation d'une droite de coefficient directeur (– 1) car : $\boxed{L = -\ell + 40,}$

② est une équation d'une droite de coefficient directeur $\frac{5}{3}$ car : $\boxed{L = \frac{5}{3}\ell - \frac{16}{3}.}$

Ces deux droites ont des coefficients directeurs différents, elles sont sécantes. Par conséquent le système Ⓢ admet une solution et une seule.

- En multipliant les deux membres de ① par (– 3) :

$-3L - 3\ell = -120$ ①'

$3L - 5\ell = -16$ ②

En ajoutant membre à membre ①' et ② :

$-8\ell = -136$ $\boxed{\ell = 17}$

En reportant la valeur de ℓ dans ① :

$L + 17 = 40$ $\boxed{L = 23}$

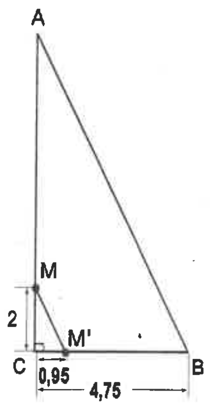
- Vérifions ces résultats.

On a bien : $\begin{cases} 23 + 17 = 40 \\ 3 \times 23 - 5 \times 17 = -16 \end{cases}$

Solution du problème :

Ce champ a pour longueur *23 m*, pour largeur *17 m*.

Exercice 3



Dans le triangle ABC, (AB) et (MM') sont parallèles.

D'après la propriété de Thalès, $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{M'C}$

Donc : $AC = \frac{BC}{M'C} \times MC$

$AC = \frac{4,75}{0,95} \times 2$

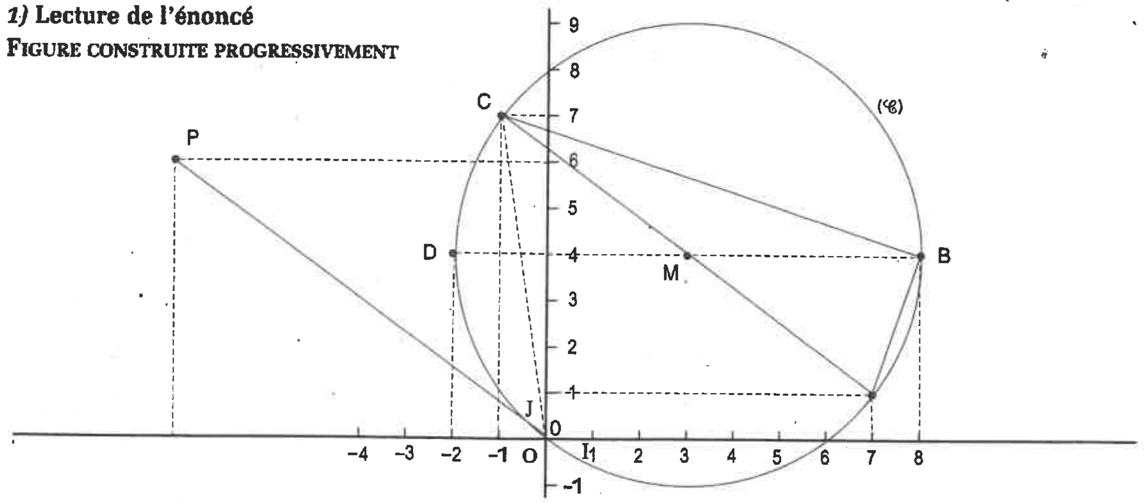
$AC = 10$

La longueur du mât est *10 mètres*.

Exercice 4

***1)* Lecture de l'énoncé**

FIGURE CONSTRUITE PROGRESSIVEMENT



QUESTION 1)	*QUESTION 2)*	*QUESTION 3)*	*QUESTION 4)*
Données • les points : A(7;1) B(8;4) C(–1;7)	**Données** • données du 1) • résultats du 1) • M : milieu de [AC] • D = S_M(B)	**Données** • données du 2) • résultats du 2) • P = $t_{\overrightarrow{AC}}$(O)	**Données** • données du 3) • résultats du 3) • (𝒞) : cercle circonscrit à ABC
Conclusions • calcul de AB, BC, CA • ABC est rectangle en B	**Conclusions** • coordonnées de M • ABCD est un rectangle	**Conclusion** • coordonnées de P	**Conclusions** • centre et rayon de (𝒞) • D ∈ (𝒞) ; O ∈ (𝒞) • (OP) est tangente à (𝒞) • équation de (OP)

- **Calcul de AB, BC, CA**

On sait que : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

On obtient : $\boxed{AB = \sqrt{10}\ ;\ BC = 3\sqrt{10}\ ;\ CA = 10}$ ①

- **Nature du triangle ABC**

permet d'écrire : $CA^2 = AB^2 + BC^2$

D'après la réciproque de Pythagore :

Donc : $\boxed{\text{ABC est rectangle en B}}$ ②

***2)* Coordonnées du milieu M de [AC]**

On a : $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$

Donc : $\boxed{M\ (3;4)}$ ③

- **Nature du quadrilatère ABCD**

ABCD est un parallèlogramme car ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu M. Ce parallèlogramme est un rectangle car ses côtés [AB] et [BC] ont leurs supports perpendiculaires.

Donc : $\boxed{\text{ABCD est un rectangle}}$ ④

***3)* Coordonnées de P, image de O par $t_{\overrightarrow{AC}}$**

P est l'image de O par $t_{\overrightarrow{AC}}$, donc : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AC}$

On sait que : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$;

donc : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\boxed{P\ (-8;6)}$ ⑤

***4)* Centre et rayon de (𝒞)**

ABC est rectangle en B et inscrit dans (𝒞), donc [AC] est un diamètre de (𝒞),

$\boxed{\text{M est le centre de (𝒞) et son rayon est 5.}}$

- **Position des points O et D par rapport à (𝒞)**

M milieu de [BD] : MD = MB = 5. $\boxed{D \in (𝒞)}$

M(3;4). Donc : $OM^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$OM = \sqrt{25} = 5$ $\boxed{O \in (𝒞)}$

- **Position de (OP) par rapport à (𝒞)**

$\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc : $-8 \times 3 + 6 \times 4 = 0$

donc (OP) ⊥ (OM) $\boxed{\text{(OP) est tangente en O à (𝒞)}}$

- **Équation de la droite (OP)**

(OP) passe par l'origine du repère, elle a donc une équation de la forme : $y = ax$.

(OP) passe par le point P(– 8;6). Donc : $6 = -8a$.

Par conséquent : $a = -\frac{3}{4}$. $\boxed{y = -\frac{3}{4}x}$

SUJET 2

EXERCICE 1

f est l'application affine définie par :

$f(x) = (4\sqrt{2} - 6)x + \sqrt{27}$

1) Compare $4\sqrt{2}$ et 6.

2) f est-elle croissante ou décroissante ?

3) Range par ordre croissant $f(\frac{3}{2})$; $f(\frac{2}{5})$; $f(\frac{2}{3})$ et $f(2)$.

EXERCICE 2

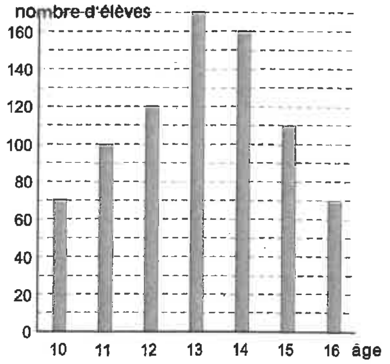
Le diagramme ci-dessous représente le nombre d'élèves d'un collège en fonction de l'âge de ces élèves.

1) Établis le tableau des effectifs et des fréquences.

2) Quel est le mode de cette série statistique ?

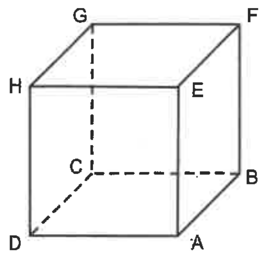
3) Calcule l'arrondi d'ordre 1 de la moyenne des âges de ces élèves.

4) Combien y a-t-il d'élèves qui ont un âge inférieur ou égal à 13 ans ?



EXERCICE 3

ABCDEFGH est la représentation en perspective d'un cube de 4 cm d'arête. M est le centre de la face ABCD et N celui de la face EFGH.



1) Redessine cette représentation ; place les points M et N ; représente les segments [NA], [NB], [NC], [ND] et la droite (MN) ; colorie le triangle AMN.

2) Dessine en dimensions réelles les figures des plans (ABC), (EAC) et (BDH).
(On admettra que AEGC et AFHD sont des rectangles)

3) Justifie que la pyramide NABCD est régulière.

4) Calcule le volume de cette pyramide.

EXERCICE 4

(𝒞) est un cercle de centre K et de diamètre [AB].
N un point de (𝒞) tel que : mes $\widehat{AKN} = 60°$.
La tangente en N au cercle (𝒞) coupe la droite (AB) en T.

1) Fais une esquisse de la figure et donne la nature des triangles ANK, TNK et ANT.
En utilisant uniquement le compas et la règle graduée, réalise à l'échelle $\frac{1}{4}$ la figure, sachant que [AB] est un segment de 10 cm.

2) Calcule TN.

3) Construis l'image L du point K par la translation de vecteur $\overrightarrow{AN}$.
Justifie que le point L appartient au cercle (𝒞).

4) Démontre que le quadrilatère ANLK est un losange.

SOLUTION

Exercice 1

1) Comparaison de $4\sqrt{2}$ et 6

on a : $(4\sqrt{2})^2 = 32$ et $6^2 = 36$
donc : $(4\sqrt{2})^2 < 6^2$ et $\boxed{4\sqrt{2} < 6}$ ①

2) Sens de variation de l'application affine f
De ① on déduit le signe du coefficient de f :
$4\sqrt{2} - 6 < 0$. Donc : $\boxed{f \text{ est décroissante}}$

3) Rangement par ordre croissant
On a : $\frac{2}{5} < \frac{2}{3} < 1 < \frac{3}{2} < 2$.

Donc : $\boxed{f(2) < f(\frac{3}{2}) < f(1) < f(\frac{2}{3}) < f(\frac{2}{5})}$.

Exercice 2

1) Tableau des effectifs et des fréquences

Âge	10	11	12	13	14	15	16	Totaux
Effectif	70	100	120	170	160	110	70	**800**
Fréq. (en %)	8	12	15	21	20	13	8	**100**

2) Mode de la série statistique
Modalité d'effectif maximal : 13 $\boxed{\text{Mode } 13}$

3) Moyenne des âges
Somme des produits des modalités par les effectifs correspondants :
$10 \times 70 + 11 \times 100 + 12 \times 120 + 13 \times 170 + 14 \times 160 + 15 \times 110 + 16 \times 70 = 10\,460$
L'effectif total étant : 800

La moyenne est : $\frac{10\,460}{800} = 13{,}075$

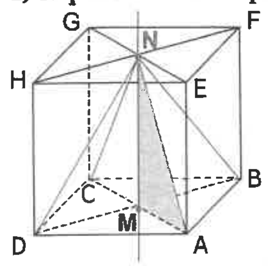
L'arrondi d'ordre 1 de la moyenne : $\boxed{13{,}1}$

4) Nombre d'élèves ayant un âge inférieur ou égal à 13 ans
Somme des effectifs correspondant à un âge inférieur ou égal à 13 : 70 + 100 + 120 + 170 = 460

$\boxed{460 \text{ élèves}}$

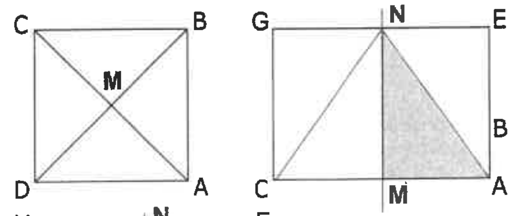
Exercice 3

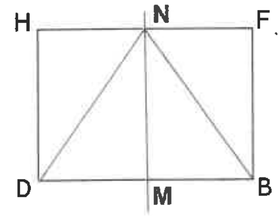
1) Représentation en perspective



Les figures sont réalisées à l'échelle $\frac{1}{2}$.

2) Figures des plans (ABC), (EAC) et (BDH)





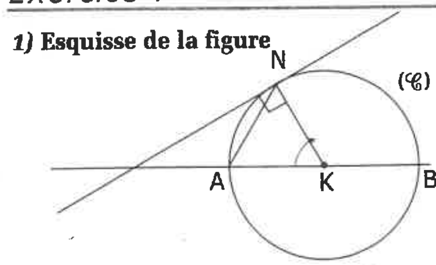
Les figures sont réalisées à l'échelle $\frac{1}{2}$.

3) Nature de la pyramide NABCD
Les arêtes [NA], [NB], [NC] et [ND] sont les hypoténuses de quatre triangles rectangles superposables NMA, NMC, NMB et NMD (voir figures des plans (EAC) et (BDH)); les faces latérales sont donc des triangles isocèles. La base ABCD est un carré.
Donc $\boxed{\text{la pyramide NABCD est régulière.}}$

4) Calcul du volume de la pyramide NABCD
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} h \mathcal{B}$; h : hauteur ; $\mathcal{B}$: aire de la base.
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 4 \times 4^2$ $\boxed{\mathcal{V} = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}}$

Exercice 4

1) Esquisse de la figure

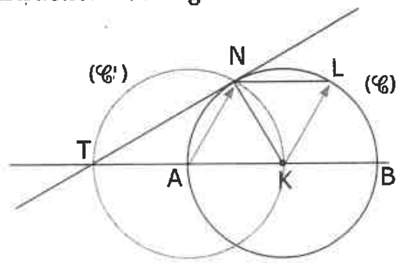


Nature des triangles ANK, TNK et ANT
• ANK est un triangle isocèle (KA = KN) qui a un angle de 60°.
$\boxed{\text{Le triangle ANK est donc équilatéral.}}$

• (TN) est la tangente en N à (𝒞) . (TN) ⊥ (KN).
$\boxed{\text{Le triangle TNK est donc rectangle en N.}}$

• Par conséquent, les angles $\widehat{N}$ et $\widehat{T}$ du triangle ANT ont la même mesure car ils ont pour complémentaire un angle de 60°.
$\boxed{\text{Le triangle ANT est donc isocèle en A.}}$

Construction de la figure



– [AB] est un segment de 10 cm.
– Tracer le cercle (𝒞) de diamètre [AB] et de centre K.
– Tracer le cercle (𝒞') de centre A et de même rayon que (𝒞).
– Désigner par N l'un des deux points d'intersection de (𝒞) et (𝒞').
– Désigner par T le deuxième point d'intersection de (𝒞') et (AB).
– Tracer [NK] et (TN).

2) Calcul de TN
Dans le triangle TNK rectangle en N : TK = AB et mes $\widehat{K} = 60°$.

Donc : $\frac{TN}{TK} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\boxed{TN = 5\sqrt{3}}$

3) Construction du point L
L étant l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{NA}$, c'est le point tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NA}$.
On a : KL = NA = 5
Donc : $\boxed{L \in (\mathcal{C})}$

4) Nature du quadrilatère ANLK
ANLK est un parallélogramme car $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NA}$.
Ce parallélogramme a deux côtés consécutifs de même mesure AK = KL.

Par conséquent, $\boxed{\text{ANLK est un losange.}}$

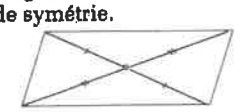
Tables trigonométriques

degrés	sin	cos	tan	1/tan	
0	0,000	1,000			90
1	0,017	1,000	0,017	57,290	89
2	0,035	0,999	0,035	28,636	88
3	0,052	0,999	0,052	19,081	87
4	0,070	0,998	0,070	14,301	86
5	0,087	0,996	0,087	11,430	85
6	0,105	0,995	0,105	9,514	84
7	0,122	0,993	0,123	8,144	83
8	0,139	0,990	0,141	7,115	82
9	0,156	0,988	0,158	6,314	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	80
11	0,191	0,982	0,194	5,145	79
12	0,208	0,978	0,213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
20	0,342	0,940	0,364	2,747	70
21	0,358	0,934	0,384	2,605	69
22	0,375	0,927	0,404	2,475	68
23	0,391	0,921	0,424	2,356	67
24	0,407	0,914	0,445	2,246	66
25	0,423	0,906	0,466	2,145	65
26	0,438	0,899	0,488	2,050	64
27	0,454	0,891	0,510	1,963	63
28	0,469	0,883	0,532	1,881	62
29	0,485	0,875	0,554	1,804	61
30	0,500	0,866	0,577	1,732	60
31	0,515	0,857	0,601	1,664	59
32	0,530	0,848	0,625	1,600	58
33	0,545	0,839	0,649	1,540	57
34	0,559	0,829	0,675	1,483	56
35	0,574	0,819	0,700	1,428	55
36	0,588	0,809	0,727	1,376	54
37	0,602	0,799	0,754	1,327	53
38	0,616	0,788	0,781	1,280	52
39	0,629	0,777	0,810	1,235	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	50
41	0,656	0,755	0,869	1,150	49
42	0,669	0,743	0,900	1,111	48
43	0,682	0,731	0,933	1,072	47
44	0,695	0,719	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	45
	sin	cos	tan	1/tan	degrés

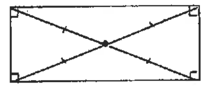
RÉVISIONS

Propriétés des parallélogrammes

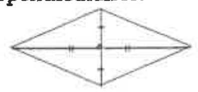
• Dans un parallélogramme, le point d'intersection des diagonales est son centre de symétrie.



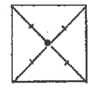
• Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle doit.



• Un losange est un parallélogramme qui a les supports de ses diagonales perpendiculaires.



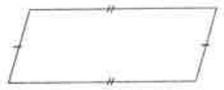
• Un carré est à la fois un losange et un rectangle.



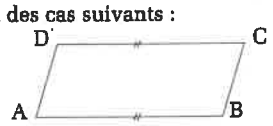
Reconnaître un quadrilatère particulier

• Un quadrilatère est un parallélogramme dans chacun des cas suivants :

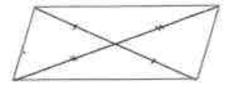
Il a les supports des côtés opposés parallèles.



Il a les côtés opposés de même longueur.



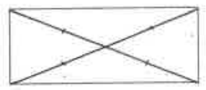
Il a deux côtés opposés de même longueur et de supports parallèles. $\vec{AB} = \vec{DC}$



Ses diagonales se coupent en leur milieu, il a un centre de symétrie.

• Un quadrilatère est un rectangle dans chacun des cas suivants :

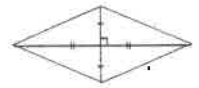
Il a ses angles droits.



Ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

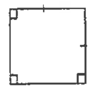
• Un quadrilatère est un losange dans chacun des cas suivants :

Il a quatre côtés de même longueur.

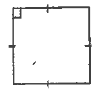


Ses diagonales se coupent en leur milieu et ont des supports perpendiculaires.

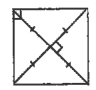
• Un quadrilatère est un carré dans chacun des cas suivants :



Il a ses angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur.



Il a un angle droit et ses côtés de même longueur.



Ses diagonales se coupent en leur milieu, ont la même longueur et des supports perpendiculaires.

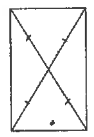
• Un quadrilatère est un trapèze dans le cas suivant :

Il a deux côtés de supports parallèles et deux côtés de supports sécants.

Reconnaître un parallélogramme particulier

• Un parallélogramme est un rectangle dans chacun des cas suivants :

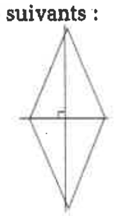
Il a un angle droit.



Ses diagonales ont la même longueur.

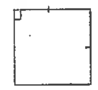
• Un parallélogramme est un losange dans chacun des cas suivants :

Il a deux côtés consécutifs de même longueur.

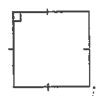


Les supports de ses diagonales sont perpendiculaires

• Un parallélogramme est un carré dans chacun des cas suivants :



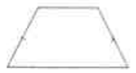
Il a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur.



Ses diagonales ont la même longueur et leurs supports sont perpendiculaires

Reconnaître un trapèze particulier

• **Un trapèze est isocèle** dans chacun des cas suivants :

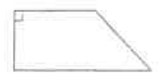


Ses côtés à supports sécants ont la même longueur.

Il a deux angles à la base de même mesure.

Il a un axe de symétrie qui est la médiatrice de ses bases.

• **Un trapèze est un rectangle** dans le cas suivant :

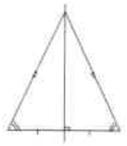


Il a un angle droit.

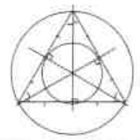
Propriétés des triangles

• **Dans un triangle,**
– la somme des mesures des angles est égales à 180°
– les hauteurs sont concourantes : (orthocentre)
– les médiatrices sont concourantes : (centre du cercle circonscrit)
– les bissectrices sont concourantes : (centre du cercle inscrit)
– les médianes sont concourantes : (centre de gravité)

Dans un triangle isocèle,
– la médiatrice de sa base,
– la bissectrice
– la hauteur
– la médiane
passant par le sommet principal.



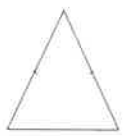
Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité est à la fois
– l'orthocentre du triangle,
– le centre du cercle circonscrit au triangle,
– le centre du cercle inscrit dans le triangle.



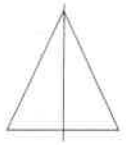
Dans un triangle rectangle,
– le cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse.
– le carré de l'hypoténus est égal à la somme des carrés des autres côtés.

Reconnaître un triangle particulier

• **Un triangle est isocèle,** dans chacun des cas suivants :

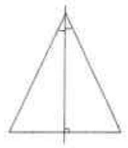


Il a deux côtés de même longueur.

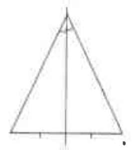


Il a un axe de symétrie.

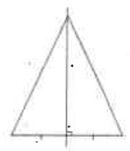
Il a deux angles de même mesure.



Une droite est à la fois bissectrice et hauteur.

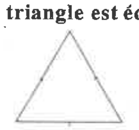


Une droite est à la fois bissectrice et médiane.

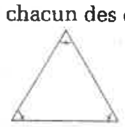


Une droite est à la fois hauteur et médiane.

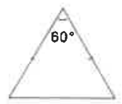
• **Un triangle est équilatéral,** dans chacun des cas suivants :



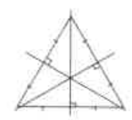
Ses trois côtés ont la même longueur.



Ses trois angles ont la même mesure.

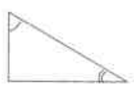


Il est isocèle et a un angle de 60°.

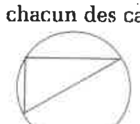


Il a trois axes de symétrie.

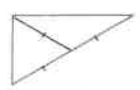
• **Un triangle est rectangle,** dans chacun des cas suivants :



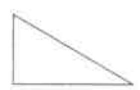
Il a deux angles complémentaires.



Il est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés.

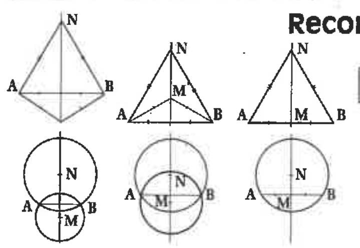


Il est inscriptible dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés.



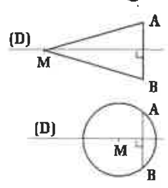
Le carré de l'un de ses côtés est la somme des carrés des deux autres côtés.

Reconnaître la médiatrice d'un segment



MA = MB | NA = NB

(MN) est la médiatrice de [AB]



M ∈ (D) et MA = MB | (D) ⊥ (AB)

(D) est la médiatrice de [AB]

INDEX
des notions abordées

Achevé d'imprimer en Italie par Legoprint
Dépôt Légal: 5766-11390 - 04/2001 - Collection 61 - Édition 10
59/4616/5